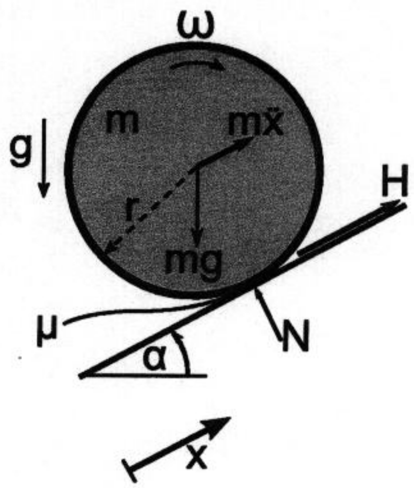
Aufgabe 1 23 Punkte

~~2~~ 1 Lösung



a) $m\ddot{x} = H - mgsin\left(\alpha\right)$
$\theta\dot{\omega} = -Hr$
$\theta = \frac{1}{2}mr^2$
$\dot{\omega} = \frac{\ddot{x}}{r}$
$H = -\frac{m\ddot{x}}{2}$
$\ddot{x} = -\frac{2}{3}gsin\left(\alpha\right)$
$H = \frac{1}{3}mgsin\left(\alpha\right) \geq \mu N = \mu mgcos\left(\alpha\right)$
$\mu \geq \frac{1}{3}tan\left(\alpha\right)$

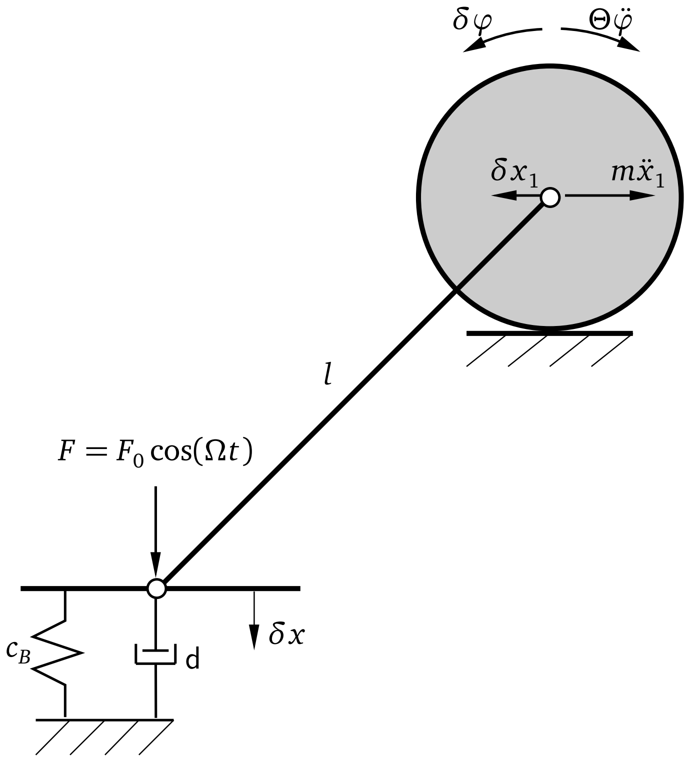
b) $\frac{1}{2}mv_0^2 + \frac{1}{2}\theta\omega_0^2 = mgh$
$\theta = \frac{mr^2}{2}$
$\omega_0 = \frac{v_0}{r}$
$v_0 = \sqrt{\frac{4}{3}gh}$

c) $\theta\dot{\omega} = -rH$
$H = \frac{1}{3}mgsin\left(\alpha\right)$
$\dot{\omega} = -\frac{rH}{\theta} = -\frac{r\frac{1}{3}mgsin\left(\alpha\right)}{\frac{mr^2}{2}} = -\frac{2gsin\left(\alpha\right)}{3r}$
$\omega = \int \dot{\omega}dt = -\frac{2gsin\left(\alpha\right)}{3r}t + C$
$\omega\left(t=0\right) = \omega_0 \;\Rightarrow\; C = \omega_0 = \frac{v_0}{r} = \frac{1}{r}\sqrt{\frac{4}{3}gh}$
$\omega = -\frac{2gsin\left(\alpha\right)}{3r}t + \frac{1}{r}\sqrt{\frac{4}{3}gh}$
$\omega\left(t_h\right) = 0 \;\Rightarrow\; t_h = \frac{\sqrt{3gh}}{gsin\left(\alpha\right)}$

d) $n = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{t_h}\omega dt = -\frac{2gsin\left(\alpha\right)}{3r}\frac{t_h^2}{2} + \frac{1}{r}\sqrt{\frac{4}{3}gh}t_h$
$n = \frac{h}{2\pi rsin\left(\alpha\right)}$
ODER:
$n = \frac{L}{2\pi r}; L = \frac{h}{sin\left(\alpha\right)}; n = \frac{h}{2\pi rsin\left(\alpha\right)}$

Aufgabe 2 [22 Punkte]

a) Ersatzsystem (Dämpfer und Ersatzfeder des Balkens sind parallelgeschaltet):



Ersatzfeder für den Balken:

$$\delta_{11} = \frac{1}{3}\frac{(3a)^3}{EI} = \frac{9a^3}{EI} \;\Rightarrow\; c_B = \frac{1}{\delta_{11}} = \frac{EI}{9a^3} \tag{1}$$

Kinematik (alternativ grafisch ermitteln):

$$l^2 = (3a)^2 + (3a)^2 = (3a - x_1)^2 + (3a + x)^2 = (3a)^2 - 6ax_1 + (x_1)^2 + (3a)^2 + 6ax + (x)^2$$

$(x_1)^2$ und $(x)^2$ sind vernachlässigbar (kleine Auslenkungen)

$$\Rightarrow\; x_1 = x \tag{2}$$

$$x_1 = a\varphi \;\Rightarrow \varphi = \frac{x_1}{a} = \frac{x}{a} \tag{3}$$

Prinzip von d'Alembert:

$\delta W + \delta W_T = 0$

$F\delta x - xc_B\delta x - d\dot{x}\delta x - m\ddot{x}_1\delta x_1 - \Theta\ddot{\varphi}\delta\varphi = 0$

mit (1), (2), (3) und $\Theta = \dfrac{ma^2}{2}$ ergibt sich

$$\left[m\ddot{x} + \frac{ma^2}{2}\frac{\ddot{x}}{a}\frac{1}{a} + d\dot{x} + \frac{EI}{9a^3}x - F_0\cos(\Omega t) \right] \delta x = 0$$

$\delta x \neq 0 \quad \Rightarrow \quad [-----] = 0$

$$\Rightarrow \boxed{\ddot{x} + \frac{2d}{3m}\dot{x} + \frac{2EI}{27ma^3}x = \frac{2F_0}{3m}\cos(\Omega t)}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\omega^2 = \frac{2EI}{27ma^3}}$$

b) Die Partikularlösung ist gegeben mit

$$x_p = \underbrace{x_0 V}_{A} \cos(\Omega t - \alpha)$$

$$x_0 = \frac{F_0}{c_B} = \frac{9a^3 F_0}{EI}$$

$$2\delta = \frac{2d}{3m} = \frac{2\frac{1}{2}m\omega}{3m} \quad \Rightarrow \quad \delta = \frac{\omega}{6} \quad (d = \tfrac{1}{2}m\omega \text{ ist gegeben})$$

$$D = \frac{\delta}{\omega} = \frac{1}{6}$$

$$\eta = \frac{\Omega}{\omega} = \frac{3}{2} \quad \text{(gegeben)}$$

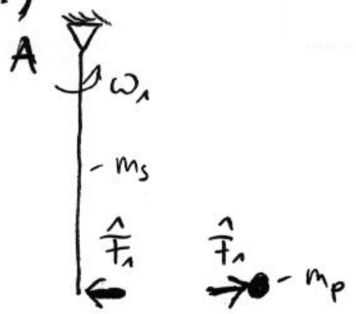
$$V = \frac{1}{\sqrt{(1-\eta^2)^2 + 4D^2\eta^2}} = \frac{4}{\sqrt{29}}$$

Die Amplitude ist dann

$$\boxed{A = x_0 V = \frac{36}{\sqrt{29}} \frac{a^3 F_0}{EI}}$$

Aufgabe 3

1)



$$\rightarrow: \quad m_p\left(\bar{v}_p^{\wedge} - v_p^{\wedge}\right) = \hat{F}_1 \qquad v_p^{\wedge} = 0 \quad \Rightarrow \quad \hat{F}_1 = m_p \bar{v}_p^{\wedge}$$

$$\curvearrowleft A: \quad \Theta_s\left(\bar{\omega}_1 - \omega_1\right) = -\hat{F}_1 \cdot l \qquad \Theta_s = \frac{1}{3} m_s l^2$$

$$e = 1 = -\frac{\bar{v}_s^{\wedge} - \bar{v}_p^{\wedge}}{v_s - v_p} \qquad \begin{array}{l} \bar{v}_s^{\wedge} = \bar{\omega}_1 \cdot l \\ v_s = \omega_1 \cdot l \end{array} \qquad v_p = 0$$

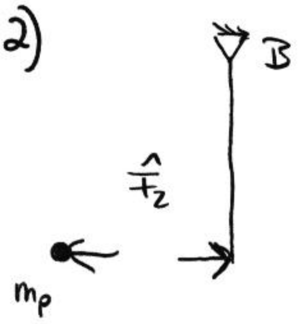
$$\bar{v}_p^{\wedge} = \omega_1 \cdot l + \bar{\omega}_1 \cdot l = \omega_1 \cdot l + \left(-\frac{\hat{F}_1 \cdot l}{\Theta_s} + \omega_1\right) \cdot l$$

$$= 2\omega_1 \cdot l - 3 m_p \bar{v}_p^{\wedge} l \cdot \frac{1}{m_s l^2} \cdot l$$

$$\bar{v}_p^{\wedge} = 2\omega_1 \cdot l - 9 \bar{v}_p^{\wedge}$$

$$\bar{v}_p^{\wedge}(1+9) = 2\omega_1 l \quad \Rightarrow \quad \bar{v}_p^{\wedge} = \frac{1}{5}\omega_1 l$$

2)



$$\rightarrow: \quad m_p\left(\bar{v}_p^{2} - v_p^{2}\right) = -\hat{F}_2 \qquad v_p^2 = \bar{v}_p^{\wedge} = \frac{1}{5}\omega_1 l$$

$$\curvearrowleft B: \quad \Theta_s\left(\bar{\omega}_2 - \omega_2\right) = \hat{F}_2 \cdot l \qquad \omega_2 = 0$$

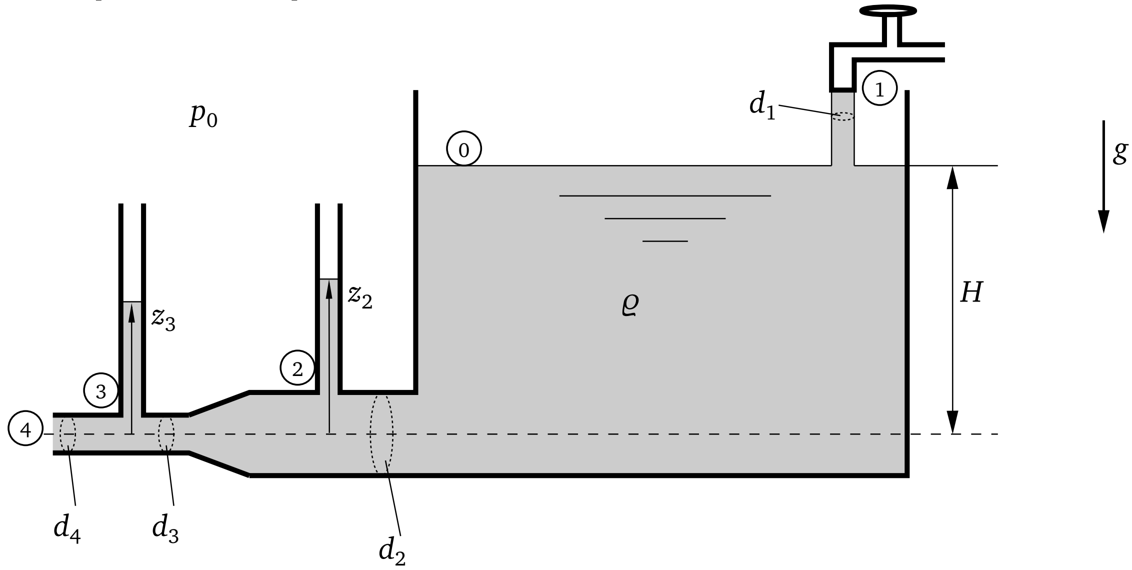
$$\hat{F}^2 = \frac{1}{3} m_s l \bar{\omega}_2 \quad \Rightarrow \quad \bar{\omega}_2 = \frac{3 \hat{F}_2}{m l}$$

$$e = 0 \quad \Rightarrow \quad \bar{v}_s^2 = \bar{v}_p^2 = \bar{\omega}_2 l$$

$$\bar{\omega}_2 = \frac{3}{ml}\hat{F}_2 = \frac{3}{ml}(-3m)\left(\bar{\omega}_2 l - \frac{1}{5}\omega_1 l\right)$$

$$\bar{\omega}_2 = -9\bar{\omega}_2 + \frac{9}{5}\omega_1 \quad \Rightarrow \quad \bar{\omega}_2 = \frac{9}{50}\omega_1$$

Aufgabe 4 [20 Punkte]



a) Ausflussgeschwindigkeit mit Bernoulli 0 - 4

$$\varrho g H = \frac{1}{2}\varrho v_4^2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{v_4 = \sqrt{2gH}}$$

H =konst. $\Rightarrow$ Flüssigkeitsmenge im Behälter bleibt konst. $\Rightarrow$ mit der Konti.-Gl. zwischen 1 und 2

$$Q_1 = Q_4 \quad \Rightarrow \quad v_1 A_1 = v_4 A_4$$

$$v_1 = \frac{A_4}{A_1} v_4 = \frac{\frac{\pi d_4^2}{4}}{\frac{\pi d_1^2}{4}} \sqrt{2gH}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{v_1 = \left(\frac{d_4}{d_1}\right)^2 \sqrt{2gH}}$$

b) Drücke an den Stellen 2 und 3

$$p_2 = p_0 + \varrho g z_2 \tag{1}$$
$$p_3 = p_0 + \varrho g z_3 \tag{2}$$

Bernoulli 2 - 4

$$\frac{1}{2}\varrho v_2^2 + 0 + p_2 = \frac{1}{2}\varrho v_4^2 + 0 + p_0 \tag{3}$$

Konti.-Gl. zwischen 2 und 4

$$A_2 v_2 = A_4 v_4 \quad \Rightarrow \quad v_2 = \frac{A_4}{A_2} v_4 \quad \Rightarrow \quad v_2 = \left(\frac{d_4}{d_2}\right)^2 \sqrt{2gH} \tag{4}$$

(1) und (4) in (3) ergibt

$$\frac{1}{2}\varrho \left(\frac{d_4}{d_2}\right)^4 2gH + p_0 + \varrho g z_2 = \frac{1}{2}\varrho 2gH + p_0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{z_2 = \left(1 - \left(\frac{d_4}{d_2}\right)^4\right) H}$$

Bernoulli 3 - 4

$$\frac{1}{2}\varrho v_3^2 + 0 + p_3 = \frac{1}{2}\varrho v_4^2 + 0 + p_0 \tag{5}$$

Konti.-Gl. zwischen 3 und 4 mit $A_4 = A_3$

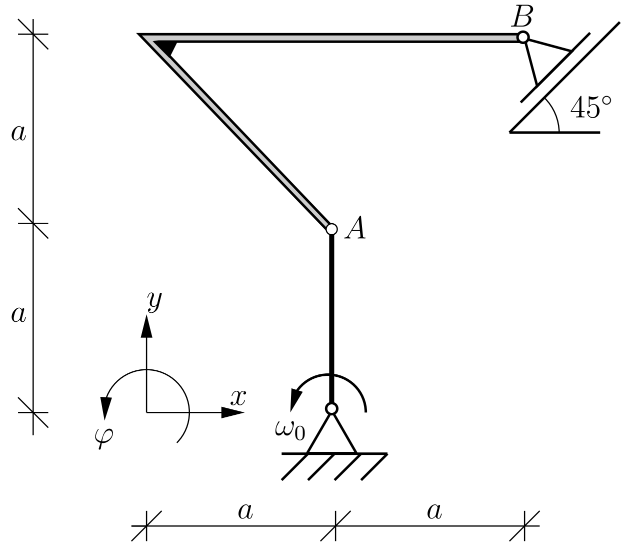
$$A_3 v_3 = A_3 v_4 \quad \Rightarrow \quad v_3 = v_4 \tag{6}$$

(2) und (6) in (5) ergibt

$$\frac{1}{2}\varrho v_4^2 + p_0 + \varrho g z_3 = \frac{1}{2}\varrho v_4^2 + p_0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{z_3 = 0}$$

Kurzfrage 1 [5 Punkte]

Der dargestellte starre Mechanismus besteht aus einem Stab und einem abgeknickten Balken. Es wird angenommen, daß sich der Stab mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit ω_0 dreht.



Kreuzen Sie an!

- Die Koordinaten (x, y) des Momentanpols des **Stabes** sind:

  $(a, 0)$; (a, a); $(a, 2a)$; $(2a, 2a)$; $(a, 3a)$;

- Die Koordinaten (x, y) des Momentanpols des **Balkens** sind:

  $(a, 0)$; (a, a); $(a, 2a)$; $(2a, 2a)$; $(a, 3a)$;

- Die Winkelgeschwindigkeit, mit der sich der **Balken** dreht, beträgt:

  $-\omega_0$; $2\omega_0$; $-2\omega_0$; $\omega_0/2$; $-\omega_0/2$

- Die Geschwindigkeit $\mathbf{v}_A = (\ _x, \ _y)$ des **Punktes** A in der dargestellten Lage beträgt:

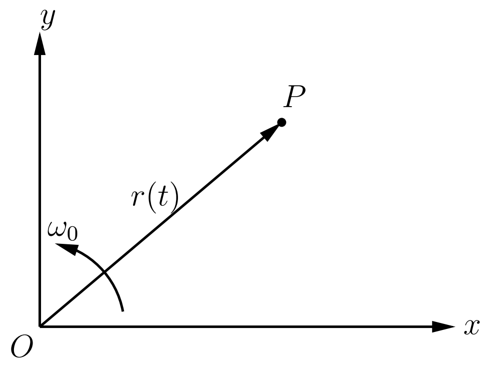
  $(a\,\omega_0, 0)$; $(-a\,\omega_0, 0)$; $(2a\,\omega_0, 0)$; $(2a\,\omega_0, a\,\omega_1)$; $(0, a\,\omega_0)$;

- Der Betrag der Geschwindigkeit $\ _B$ des **Punktes** B in der dargestellten Lage beträgt:

  $\sqrt{2}a\omega_0$; $2a\omega_0$; $a\omega_0/\sqrt{2}$; $a\omega_0$;

Kurzfrage 2 [2 Punkte]

Der Massepunkt P bewegt sich mit einer konstanten Winkelgeschwindigkeit ω_0 um den Punkt O. Der Abstand r zwischen O und P ist zeitlich veränderlich; es gilt: $r(t) = r_0(5 + \sin(\omega_0\, t))$.



Kreuzen sie an!

- Die radiale Komponente $_r$ der **Geschwindigkeit v** beträgt:

  $-r_0\,\omega_0\,\cos(\omega_0\,t)$; $r_0\,\cos(\omega_0\,t)$; $r_0\,\sin(\omega_0\,t)$; $r_0\,\omega_0\,\cos(\omega_0\,t)$; 0

- Die zirkulare Komponente $_\varphi$ der **Geschwindigkeit v** beträgt:

  $r_0\,\omega_0\,\sin(\omega_0\,t)$; $r_0\,\omega_0\,(5 + \sin(\omega_0\,t))$; $r_0\,\omega_0\,\cos(\omega_0\,t)$; $r_0\,\omega_0^2\,(5 + \sin(\omega_0\,t))$

Kurzfrage 3 [Punkte]

Gegeben ist das skizzierte Weg-Zeit-Diagramm $x(t)$. Skizzieren Sie das zugehörigen Geschwindigkeit-Zeit-Diagramm (t) sowie das Beschleunigung-Zeit-Diagramm $a(t)$.