TM III Lösungen

Aufgabe 1

a) Freier Fall im Bereich $0 \leq z \leq l$, $0 \leq t_1 \leq T_1$

Integration der Bewegungsgleichung $\ddot{z} = g$:

$$\begin{aligned} \dot{z} &= g\,t + C_1\ , \\ z &= \frac{1}{2}\,g\,t^2 + C_1\,t + C_2\ . \end{aligned}$$

Aus den Anfangsbedingungen $z(0) = 0$, $\dot{z}(0) = 0$ folgt $C_1 = 0$, $C_2 = 0$ und somit

$$\begin{aligned} \dot{z} &= g\,t\ , \\ z &= \frac{1}{2}\,g\,t^2 \end{aligned}$$

An der Stelle l gilt

$$T_1 = \sqrt{\frac{2\,l}{g}}\ , \quad v_1 = \sqrt{2\,g\,l}\ . \quad \text{(auch direkt aus Energiesatz)}$$

b) mit Seil: $l \leq z \leq 2l$

$$\ddot{z} = 3g - 2g\frac{z}{l}$$

$$\ddot{z} = \frac{d\dot{z}}{dt} = \frac{d\dot{z}}{dz}\frac{dz}{dt} = \dot{z}\frac{d\dot{z}}{dz}$$

$$\begin{aligned} \int\limits_{\sqrt{2gl}}^{v_2(z)} \dot{z}d\dot{z} &= \int\limits_{l}^{z} (3g - 2g\frac{z}{l})dz \\ \frac{1}{2}\dot{z}^2|_{\sqrt{2gl}}^{v_2(z)} &= (3gz - g\frac{z^2}{l})|_l^z \\ \frac{1}{2}v_2^2(z) - gl &= 3gz - g\frac{z^2}{l} - 3gl + gl \\ v_2(z) &= \sqrt{6gz - 2g\frac{z^2}{l} - 2gl} \\ v_2(2l) &= \sqrt{2gl} \end{aligned}$$

c) unter Wasser: $\ddot{z} = -k\,\dot{z}^2$, $z \geq 2l$

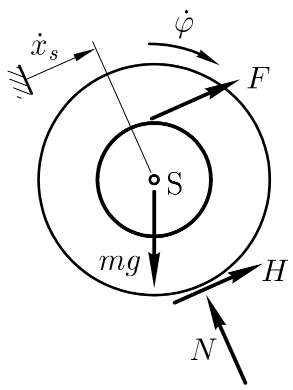
$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}\dot{z}}{\mathrm{d}t} &= -k\,\dot{z}^2 \ , \\
-\int\limits_{\sqrt{2gl}}^{v_3(t)} \frac{\mathrm{d}\dot{z}}{\dot{z}^2} &= k\int_0^t \mathrm{d}t \ , \\
\frac{1}{\dot{z}}\Big|_{\sqrt{2gl}}^{v_3(t)} &= k\,t \ , \\
\frac{1}{v_3(t)} - \frac{1}{\sqrt{2gl}} &= kt.
\end{aligned}$$

$$v_3(t) = \frac{1}{kt + \frac{1}{\sqrt{2gl}}} = \frac{\sqrt{2gl}}{\sqrt{2gl}kt + 1}$$

Aufgabe 2

a) Haften

• Freikörperbild



• Kinetik

$$m\ddot{x}_S = F + H - mg\sin\alpha \tag{1}$$

$$\Theta_S\ddot{\varphi} = Fr - H2r \tag{2}$$

• Kinematik

$$\dot{x}_S = 2r\,\dot{\varphi} \quad \longrightarrow \quad \ddot{x}_S = 2r\,\ddot{\varphi} \tag{3}$$

$$\dot{x}_F = 3r\,\dot{\varphi} \tag{4}$$

• Auflösung

(1)·2r+(2) $\quad 2mr\ddot{x}_S + \Theta_S\ddot{\varphi} = 3Fr - 2mgr\sin\alpha$

(3)→ $\quad 3mr\ddot{x}_S = 3Fr - 2mgr\sin\alpha$

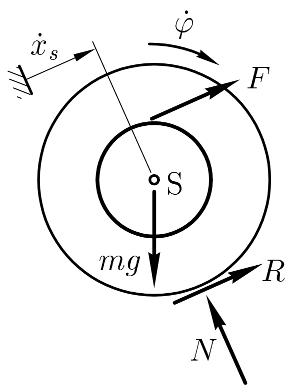
$$\ddot{x}_S = \frac{F}{m} - \frac{2}{3}g\sin\alpha$$

$$\ddot{\varphi} = \frac{F}{2mr} - \frac{1}{3}\frac{g}{r}\sin\alpha$$

$$\ddot{x}_F = \frac{3}{2}\frac{F}{m} - g\sin\alpha$$

b) Reiben

• Freikörperbild



• Kinetik

$$m\ddot{x}_S = F + R - mg\sin\alpha \quad (5)$$

$$\Theta_S\ddot{\varphi} = Fr - R2r \quad (6)$$

$$0 = N - mg\cos\alpha \quad (7)$$

• Reibung

$$R = \mu N = \mu mg\cos\alpha \quad (8)$$

• Kinematik

$$\dot{x}_F = \dot{x}_S + r\dot{\varphi} \quad (8)$$

• Auflösung

$$\ddot{x}_S = \frac{F}{m} + g(\mu\cos\alpha - \sin\alpha)$$

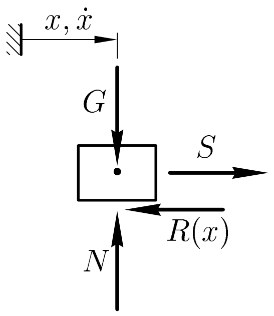
$$\ddot{\varphi} = \frac{F}{2mr} - \frac{\mu g}{r}\cos\alpha$$

$$\ddot{x}_F = \frac{3}{2}\frac{F}{m} - g\sin\alpha$$

Aufgabe 3

a)

- Freikörperbild



- Normalkraft

$$N = G = m_K\, g$$

- Reibkraft

$$R(x) = m_K\, g\, \mu_A \left(1 + \frac{x}{l}\beta\right)$$

- Reibarbeit

$$W_{R,AB} = -\int_0^l R(x)\, \mathrm{d}x$$

- Ausrechnen

$$W_{R,AB} = -m_K\, g\, \mu_A\, l \left(1 + \frac{1}{2}\beta\right)$$

b)

- Geometrie

$$l = r\, \varphi_B$$

- Antriebsarbeit

$$W_{A,AB} = 4 \int_0^{\varphi_B} M_0\, \mathrm{d}\varphi$$

- Ausrechnen

$$W_{A,AB} = 4\, \frac{l}{r} M_0$$

c)

- Arbeitssatz

$$T_A + U_A + W_{AB} = T_B + U_B$$

$$T_A = 0$$

$$U_A = 0$$

$$W_{AB} = W_{R,AB} + W_{A,AB} = 4\, \frac{l}{r} M_0 - m_K\, g\, \mu_A\, l \left(1 + \frac{1}{2}\beta\right)$$

$$T_B = \frac{1}{2}\, m_K\, v_B^2 + \frac{1}{2}\, m_T\, v_B^2$$

$$U_B = -m_T\, g\, l\, \sin\alpha$$

- Kinematik

$$v_B = r\, \dot{\varphi}_B$$

$$v_T = v_C$$

- Ausrechnen

$$4\, \frac{l}{r} M_0 - m_K\, g\, \mu_A\, l \left(1 + \frac{1}{2}\beta\right) = \frac{1}{2}\, v_B^2\, [m_K + m_T] - m_T\, g\, l\, \sin\alpha$$

$$v_B^2 = \frac{8\, \frac{l}{r}\, M_0 + 2\, g\, l \left[m_T\, \sin\alpha - m_K\, \mu_A \left[1 + \frac{1}{2}\beta\right]\right]}{m_K + m_T}$$

Aufgabe 4 (MB)

a) Drall

$$
\begin{aligned}
L_z^{(0)}|_{t=0} &= \Theta_{ges}^{(0)}(z_0)\,\omega_0 \\
\Theta_{ges}^{(0)}(z_0) &= m\,r_0^2 + \Theta_z^{(0)} \\
r &= |z-a| \\
r_0 &= z_0 - a \\
\longrightarrow L_z^{(0)}|_{t=0} &= [m\,r_0^2 + \Theta_z^{(0)}]\,\omega_0 \\
&= [m\,(z_0-a)^2 + \Theta_z^{(0)}]\,\omega_0
\end{aligned}
$$

Kinetische Energie $T_0 = E_{kin\,0}$

$$
\begin{aligned}
E_{kin\,0} &= \frac{1}{2}\Theta_{ges}^{(0)}(z_0)\,\omega_0^2 \\
&= \frac{1}{2}\,m\,v_0^2 + \frac{1}{2}\Theta_z^{(0)}\,\omega_0^2 \\
&= \frac{1}{2}(m\,(z_0-a)^2 + \Theta_z^{(0)})\omega_0^2
\end{aligned}
$$

b) Da keine äußeren Momente um die z-Achse wirken, ist die z-Komponente des Dralls konstant.

$$
\begin{aligned}
L_z^{(0)}|_{t=0} &= L_z^{(0)}|_{t>0} \\
\Theta_{ges}^{(0)}(z_0)\,\omega_0 &= \Theta_{ges}^{(0)}(z)\,\omega(z) \\
\Theta_{ges}^{(0)}(z) &= \Theta_z^{(0)} + m\,r^2(z) = \Theta_z^{(0)} + m\,(z-a)^2 \\
\longrightarrow \omega(z) &= \frac{m\,(z_0-a)^2 + \Theta_z^{(0)}}{m\,(z-a)^2 + \Theta_z^{(0)}}\,\omega_0
\end{aligned}
$$

c) Energieerhaltung

$$\begin{aligned}
E_{pot\,0} + E_{kin\,0} &= E_{pot\,1} + E_{kin\,1} \\
E_{pot\,0} &= m\,g\,z_0 \\
E_{kin\,0} &= \frac{1}{2}\,m\,v_0^2 + \frac{1}{2}\Theta_z^{(0)}\,\omega_0^2 \\
E_{pot\,1}(z) &= m\,g\,z \\
E_{kin\,1}(z) &= \frac{1}{2}\,m\,v_{rel}^2(z) + \frac{1}{2}\,\Theta_{ges}^{(0)}(z)\,\omega^2(z) \\
&= \frac{1}{2}m[v_{rel}^2(z) + \omega^2(z)r^2(z)] + \frac{1}{2}\Theta_z^{(0)}\omega^2(z)
\end{aligned}$$

$$m\,g\,z_0 + \frac{1}{2}\,m\,v_0^2 \,+\, \frac{1}{2}\,\Theta_z^{(0)}\,\omega_0^2 = m\,g\,z + \frac{1}{2}m[v_{rel}^2(z) + \omega^2(z)r^2(z)] + \frac{1}{2}\Theta_z^{(0)}\omega^2(z)$$

$$\begin{aligned}
\longrightarrow v_{rel}^2 &= 2g(z_0 - z) + (z_0 - a)^2\omega_0^2 + \frac{1}{m}\Theta_z^{(0)}\omega_0^2 - (z-a)^2\omega^2(z) - \frac{1}{m}\Theta_z^{(0)}\omega^2(z) \\
&= 2g(z_0 - z) + \frac{[(z-a)^2 - (z_0 - a)^2][m(z_0 - a)^2 + \Theta_z^{(0)}]}{m(z-a)^2 + \Theta_z^{(0)}}\,\omega_0^2
\end{aligned}$$

Aufgabe 4 (BI)

Kolbengleichgewicht: $A_1 p_1 = A_1 p_0 + F$

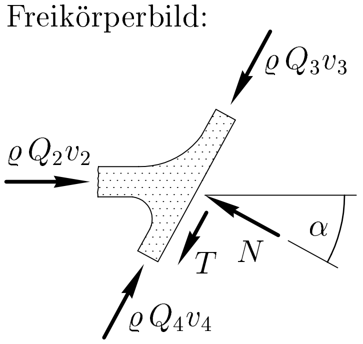
Kontinuität: $Q_1 = Q_2 \Rightarrow A_1 v_1 = A_2 v_2$

Energieerhaltung: $\frac{1}{2}\varrho v_1^2 + p_1 = \frac{1}{2}\varrho v_2^2 + p_0$

Ausrechnung: $v_2 = \sqrt{\frac{2F}{\varrho A_1 \left(1 - \left(\frac{A_2}{A_1}\right)^2\right)}}$

b) **Kontaktkräfte**

Freikörperbild:



Glatte Oberfläche: $T = 0$

Kräftebilanz: $N - \varrho Q_2 v_2 \cos\alpha = 0$

Ausrechnung: $N = F \frac{2\frac{A_2}{A_1}\cos\alpha}{1 - \left(\frac{A_2}{A_1}\right)^2}$

c) **Abströmgeschwindigkeiten**

Energieerhaltung:
$$\frac{1}{2}\varrho v_2^2 + p_0 = \frac{1}{2}\varrho v_3^2 + p_0$$
$$\frac{1}{2}\varrho v_2^2 + p_0 = \frac{1}{2}\varrho v_4^2 + p_0$$
$$\Rightarrow v_3 = v_4 = v_2 = \sqrt{\frac{2F}{\varrho A_1 \left(1 - \left(\frac{A_2}{A_1}\right)^2\right)}}$$

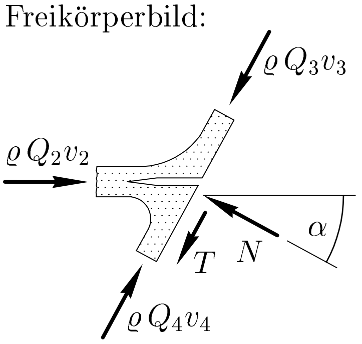
Kontinuität: $Q_2 = Q_3 + Q_4 \Rightarrow A_2 v_2 = A_3 v_3 + A_4 v_4$

Kräftebilanz: $\varrho Q_2 v_2 \sin\alpha - \varrho Q_3 v_3 + \varrho Q_4 v_4 = 0$

Ausrechnung:
$$Q_3 = A_2 v_2 \frac{1 - \sin\alpha}{2} = A_2 \sqrt{\frac{2F}{\varrho A_1 \left(1 - \left(\frac{A_2}{A_1}\right)^2\right)}}\ \frac{1 - \sin\alpha}{2}$$
$$Q_4 = A_2 v_2 \frac{1 + \sin\alpha}{2} = A_2 \sqrt{\frac{2F}{\varrho A_1 \left(1 - \left(\frac{A_2}{A_1}\right)^2\right)}}\ \frac{1 + \sin\alpha}{2}$$

d) **Kontaktkräfte mit Strahlteiler**

Freikörperbild:



Energieerhaltung:	$v_3 = v_4 = v_2$ (s.o.)
Kräftebilanz:	$N - \varrho\, Q_2 v_2 \cos\alpha = 0$ (s.o.)
	$-T + \varrho\, Q_2 v_2 \sin\alpha - \varrho\, Q_3 v_3 + \varrho\, Q_4 v_4 = 0$
Volumenströme:	$Q_3 = v_3 A_3 = \beta\, Q_2 = \beta A_2 v_2$
	$Q_4 = v_4 A_4 = (1-\beta)\, Q_2 = (1-\beta) A_2 v_2$
Ausrechnung:	$N = \varrho\, A_2 v_2^2 = F \dfrac{2\,\frac{A_2}{A_1}\cos\alpha}{1-\left(\frac{A_2}{A_1}\right)^2}$ (s.o.)
	$T = \varrho\, A_2 v_2^2 (1 + \sin\alpha - 2\beta) = F \dfrac{2\,\frac{A_2}{A_1}(1+\sin\alpha-2\beta)}{1-\left(\frac{A_2}{A_1}\right)^2}$