Lösung zu Aufgabe 1 [21 Punkte]

a) $\vec{v}_A = \vec{\omega}_{OA} \times \vec{r}_{OA}$, $\quad \vec{a}_A = \vec{\omega}_{OA} \times (\vec{\omega}_{OA} \times \vec{r}_{OA})$

$$\vec{v}_A = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -r \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\omega_0 r \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{a}_A = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ -\omega_0 r \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega_0^2 r \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

b) $\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{\omega}_{AB} \times \vec{r}_{AB}$, $\quad \vec{v}_B = \vec{\omega}_{CB} \times \vec{r}_{CB}$

$$\vec{v}_B = \begin{pmatrix} v_{Bx} \\ v_{By} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\omega_0 r \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_{AB} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} r \\ a \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{v}_B = \begin{pmatrix} v_{Bx} \\ v_{By} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_{CB} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -a \\ r \\ 0 \end{pmatrix}$$

Das ergibt 4 Gleichungen in den 4 Unbekannten:

$$\begin{aligned}
v_{Bx} &= -\omega_{AB}\, a & &\rightarrow & \omega_{AB} &= -\frac{1}{a}\, v_{Bx} \\
v_{By} &= -\omega_0\, r + \omega_{AB}\, r & &\rightarrow & v_{By} &= -\omega_0\, r - \frac{r}{a}\, v_{Bx} \\
v_{Bx} &= -\omega_{CB}\, r & &\rightarrow & -\omega_{CB} &= \frac{1}{r}\, v_{Bx} \\
v_{By} &= -\omega_{CB}\, a & &\rightarrow & v_{By} &= \frac{a}{r}\, v_{Bx}
\end{aligned}$$

Auflösen liefert

$$\vec{v}_B = \frac{\omega_0\, r}{a^2 + r^2} \begin{pmatrix} -a\, r \\ -a^2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{\omega}_{AB} = \frac{\omega_0\, r}{a^2 + r^2} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ r \end{pmatrix}, \quad \vec{\omega}_{CB} = \frac{\omega_0\, r}{a^2 + r^2} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ a \end{pmatrix}$$

c) $\vec{v}_E = \vec{v}_D = \vec{\omega}_{CD} \times \vec{r}_{CD}$ $\quad$ mit $\quad \vec{\omega}_{CD} = \vec{\omega}_{CB} =: \vec{\omega}$ $\quad$ ergibt sich

$$\vec{v}_E = \frac{\omega_0\, r}{a^2 + r^2} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ a \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{\omega_0\, r}{a^2 + r^2} \begin{pmatrix} 0 \\ a^2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Die Beschleunigung $\vec{a}_E$ des Pumpgestänges entspricht der Tangentialbeschleunigung in D. Die Beschleunigung $\vec{a}_D$ (im Bereich D) lautet in Polarkoordinaten

$$\vec{a}_D = \underbrace{\vec{a}_C}_{=0} - \omega^2\, a\, \vec{e}_r + \dot{\omega}\, a\, \vec{e}_\varphi$$

Im Berührpunkt des Pumpgestänges gilt $\vec{e}_r = \vec{e}_x$ und $\vec{e}_\varphi = \vec{e}_y$, d.h.

$$\vec{a}_D = -\omega^2\, a\, \vec{e}_x + \dot{\omega}\, a\, \vec{e}_y$$

Damit folgt

$$\vec{a}_E = \dot{\omega}_{CD}\, a\, \vec{e}_y$$

Lösung zu Aufgabe 2 [21 Punkte]

a) • Energieerhaltung und Energien

$T_A + U_A = T_B + U_B$

$T_A = 0 \qquad T_B = \frac{1}{2}mv_B^2 + 2 \cdot \frac{1}{2}\Theta\,\omega^2$

$U_A = mgH \qquad U_B = mgh$

• Kinematik

$\omega = \frac{v_B}{r}$

• Ausrechnen

$mgH = \frac{1}{2}mv_B^2 + \Theta\frac{v_B^2}{r^2} + mgh$

$v_B^2 = \frac{Mg(H-h)}{\frac{1}{2}m + \frac{\Theta}{r^2}}$

b) • Mechanische Verlustenergie

$W_B^* = -\frac{1}{2}\Theta\,\omega^2$

c) • Arbeitssatz und Energien

$T_B + U_B + W_{BC}^* = T_C + U_C$

$W_{BC}^* = -F_{BC}x_{BC} - W_B^*$

$T_C = 0$

$U_C = mgh$

• Ausrechnen

$\frac{1}{2}mv_B^2 + \frac{1}{2}\Theta\frac{v_B^2}{r^2} - F_{BC}x_{BC} = mgh$

$x_{BC} = \frac{v_B^2\left(m + \frac{\Theta}{r^2}\right) - mgh}{2F_{BC}}$

Lösung zu Aufgabe 3 a [22 Punkte]

a) Massenträgheitsmomente bez. Oxyz:

$$\Theta_{xx} = \frac{mb^2}{12}\,, \quad \Theta_{yy} = \frac{mh^2}{12}\,, \quad \Theta_{zz} = \frac{m(b^2+h^2)}{12}$$

Deviationsmomente sind Null.

b) Drall der Platte um O:

$$\begin{aligned}
\vec{\omega} &= \omega \vec{e}_{z_1} = \omega(-\sin\theta \vec{e}_y + \cos\theta \vec{e}_z) \\
\vec{L}^{(0)} &= \Theta_{xx}\omega_x \vec{e}_x + \Theta_{yy}\omega_y \vec{e}_y + \Theta_{zz}\omega_z \vec{e}_z \\
&= -\omega\Theta_{xx}\sin\theta \vec{e}_y + \omega\Theta_{zz}\cos\theta \vec{e}_z
\end{aligned}$$

c) resultierendes Moment $\vec{M}^{(0)}$:

$$\begin{aligned}
\vec{M}^{(0)} &= \dot{\vec{L}}^{(0)} = \underbrace{\frac{\partial \vec{L}}{\partial t}}_{=0} + \vec{\omega} \times \vec{L}^{(0)} \\
&= \omega^2(-\sin\theta \vec{e}_y + \cos\theta \vec{e}_z) \times (-\Theta_{yy}\sin\theta \vec{e}_y + \Theta_{zz}\cos\theta \vec{e}_z) \\
&= \omega^2(-\Theta_{zz}\sin\theta\, \cos\theta + \Theta_{yy}\sin\theta\, \cos\theta)\vec{e}_x \\
\vec{M}^{(0)} &= \omega^2(\Theta_{yy} - \Theta_{zz})\sin\theta\, \cos\theta = \frac{\omega^2}{2}(\Theta_{yy} - \Theta_{zz})\sin 2\theta\, \vec{e}_x
\end{aligned}$$

d) kinetische Energie

$$\begin{aligned}
T &= \frac{1}{2}(\Theta_{xx}\omega_x^2 + \Theta_{yy}\omega_y^2 + \Theta_{zz}\omega_z^2) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{mh^2}{12}\omega^2\sin^2\theta + \frac{m(b^2+h^2)}{12}\omega^2\cos^2\theta\right) \\
&= \frac{1}{24}\omega^2\, m\left(h^2 + b^2\cos\theta\right)
\end{aligned}$$

Lösung zu Aufgabe 3 b [22 Punkte]

a) $p_3 + \rho g \Delta h = p_2 + \rho_m g \Delta h$

$$\Delta p = p_2 - p_3 = g\Delta h(\rho - \rho_M) \approx -\rho_M g \Delta h$$

b) Bernoulli von 3 nach 2:

$$p_3 + \frac{1}{2}\rho v_3^2 = p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2}\rho\left(v_3^2 - V_2^2\right) = \Delta p$$

Kontinuität von 3 nach 2:

$$v_3 A_3 = v_2 A_2$$

$$\Rightarrow \quad v_3 = v_2 \frac{A_2}{A_3}$$

$$\Longrightarrow \quad v_2^2 = \frac{2\Delta p}{\rho\left(A_2^2/A_3^2 - 1\right)}$$

c) Summe aller Kräfte in Strömungsrichtung:

$$F_D = A_3 p_3 - A_1 p_1 + \rho A_3 v_3^2 - \rho A_1 v_1^2$$

Kontinuität von 2 nach 1 liefert

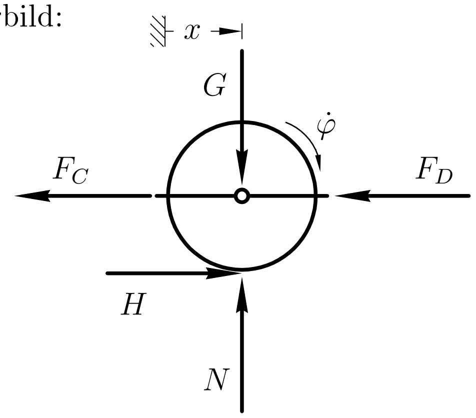
$$v_2 A_2 = v_1 A_1 \quad \Rightarrow \quad v_1 = v_2$$

Bernoulli von 2 nach 1 liefert $p_2 = p_0$. Mit $p_3 = p_2 - \Delta p$ und $p_1 = p_0$ folgt

$$F_D = p_0(A_3 - A_2) - \Delta p A_3 + \frac{2\Delta p A_2}{A_2/A_3 + 1}$$

Lösung zu Aufgabe 4 [24 Punkte]

Freikörperbild:



Massenträgheitsmoment:

$$\Theta^S = \frac{1}{2}mr^2$$

Bedingung für Rollen:

$$\dot{x} = r\dot{\varphi} \quad \Longrightarrow \quad \ddot{x} = r\ddot{\varphi}$$

Definition der Kräfte:

$$\begin{aligned} G &= mg \\ F_C &= cx \\ F_D &= d\dot{x} \end{aligned}$$

a) Newton:

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= -F_C - F_D + H && (1) \\ \Theta^S\ddot{\varphi} &= -Hr && (2) \end{aligned}$$

Ausrechnung $r \cdot (1) + (2)$:

$$\begin{aligned} mr\ddot{x} + \frac{1}{2}mr\ddot{x} &= -rF_C - rF_D \\ \frac{3}{2}m\ddot{x} + +d\dot{x} + cx &= 0 \\ \ddot{x} + \frac{2}{3}\frac{d}{m}\dot{x} + \frac{2}{3}\frac{c}{m}x &= 0 \end{aligned}$$

b) Allgemeine Lösung:

$$x(t) = \mathrm{e}^{-\delta t}(S\sin\omega_d t + C\cos\omega_d t)$$

Dämpfungsgrad:

$$\begin{aligned} \omega_0 &= \sqrt{\frac{2}{3}\frac{c}{m}} \\ 2D\omega_0 &= \frac{2}{3}\frac{d}{m} \\ \Longrightarrow \quad D &= \frac{1}{3}\frac{d}{m\omega_0} = \frac{d}{6}\sqrt{\frac{6}{cm}} \end{aligned}$$

Abklingkonstante:

$$\delta = D\omega_0 = \frac{1}{3}\frac{d}{m}$$

Kennkreisfrequenz:

$$\omega_d = \omega_0\sqrt{1-D^2} = \frac{1}{3}\frac{\sqrt{6cm - d^2}}{m}$$

c) Logarithmisches Dekrement:

$$\ln \frac{x_k}{x_{k+2}} = D\omega_0 T_d$$

aus Diagramm:

$$\begin{aligned} T_d &= 3 \text{ s} \quad \Longrightarrow \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T_d} = \frac{2\pi}{3} \frac{1}{\text{s}} \\ x_k &= 1 \text{ cm} \\ x_{k+2} &= 0,5 \text{ cm} \end{aligned}$$

Ausdruck für Dämpfungsgrad:

$$\ln \frac{1 \text{ cm}}{0,5 \text{ cm}} = D \frac{2\pi}{3} \frac{1}{\text{s}} \cdot 3 \text{ s}$$

$$\Longrightarrow D = \frac{1}{2\pi} \ln 2$$

Lösung zu Kurzfrage 1 [2 Punkte]

$\sum M = 0$

$$\frac{W}{2}\frac{d_2}{2} - \frac{W}{2}\frac{d_1}{2} - P\frac{d_2}{2} = 0$$

$$P = \frac{W}{2d_2}(d_2 - d_1) \qquad \boxed{2}$$

Lösung zu Kurzfrage 2 [3 Punkte]

$$e = \frac{v_2 \cos\beta}{v_1 \cos\alpha}$$

$\Delta G_x = 0; \qquad mv_2 \cos\beta + mv_1 \cos\alpha = 0$

$\Delta G_y = 0; \qquad mv_1 \sin\alpha - mv_2 \sin\beta = 0$

	$v_1 = v_2$	$v_1 > v_2$	$v_1 < v_2$	$\alpha = \beta$	$\alpha > \beta$	$\alpha < \beta$
$e = 1$	0.5			0.5		
$0 < e < 1$		0.5				0.5
$e = 0$		0.5				0.5

Lösung zu Kurzfrage 3 [4 Punkte]

$$\begin{aligned} v_A &= \omega r_1 \\ \omega &= \frac{v_A}{r_1} \end{aligned} \qquad \boxed{1}$$

$$\begin{aligned} v_B &= v_A + v_{B/A} \\ &= v_A + \omega r_2 \\ v_B &= v_A(1 + \frac{r_2}{r_1}) \end{aligned} \qquad \boxed{1}$$

$$\boxed{1}$$

$$\begin{aligned} & v_C &= 0 \\ \text{Since} \quad & v_A &= -v_{C/A} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{v}_D &= \overrightarrow{v}_A + \overrightarrow{v}_{B/A} \\ &= \sqrt{v_A^2 + (\omega r_1)^2} \\ v_D &= \sqrt{2} v_A \end{aligned} \qquad \boxed{1}$$

Lösung zu Kurzfrage 4 [3 Punkte]

Geschwindigkeit $v = \text{m/s}$ $\boxed{0.5}$

Winkelgeschwindigkeit $\omega = 1/\text{s}$ $\boxed{0.5}$

Impuls $p = \text{kgm/s}$ $\boxed{0.5}$

Stoßzahl $e =$ ohne Einheiten $\boxed{0.5}$

Energie $E = \text{kgm}^2/\text{s}^2$ $\boxed{0.5}$

Massenträgheitsmoment $\Theta_s = \text{kgm}^2$ $\boxed{0.5}$

	m/s	kgm^2	1/s	kgm^2/s^2	keine davon
Geschwindigkeit v	x				
Winkelgeschwindigkeit ω			x		
Impuls p					x
Stoßzahl e					x
Energie E				x	
Massenträgheitsmoment Θ_s		x			

Version: 13. Januar 2004