INSTITUT FÜR MECHANIK Technische Universität Darmstadt

Prof. D. Gross
Prof. P. Hagedorn
Prof. W. Hauger
Prof. R. Markert

Diplomvorprüfung
Technische Mechanik III
am 03. März 2003

(Name) (Vorname) (Matr.-Nr.) (Studiengang)

Die Aufgaben sind nicht nach ihrem Schwierigkeitsgrad geordnet. Bitte beginnen Sie für jede Aufgabe ein neues Blatt und numerieren Sie die Blätter. Der Lösungsweg soll klar erkennbar sein, die Ergebnisse müssen deutlich hervorgehoben werden.

Es ist erlaubt, eine handgeschriebene Formelsammlung im Umfang eines beidseitig beschriebenen DIN A4-Blattes zu benutzen. Andere Hilfsmittel sind nicht erlaubt. Es wird ausdrücklich darauf hingewiesen, daß keinerlei elektronische Hilfsmittel benutzt werden dürfen. Hierzu zählen insbesondere Taschenrechner, Laptops und Handys.

Achtung:
Alle Klausurteilnehmer bearbeiten die Aufgaben 1-2 und 4-5.
Studierende der Fachrichtung BI bearbeiten außerdem Aufgabe 3b.
Studierende aller anderen Fachrichtungen bearbeiten Aufgabe 3a anstatt Aufgabe 3b.

Viel Erfolg !

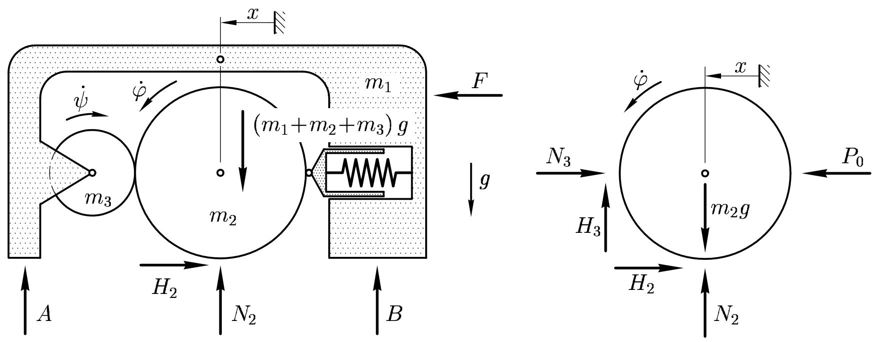
Aufgabe	1	2	3	4	5a	5b	5c	$\sum$ Klausur	Bonus-punkte	$\sum$ gesamt	Note
max. Punkte	25	21	20	22	6	3	3				
Vor-korr.											
Nach-korr.											

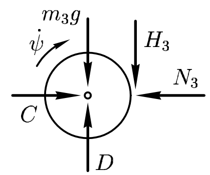
Einverständniserklärung
Nur für Studierende, die bei Prof. Markert die TM III Prüfung ablegen:
Ich stimme hiermit zu, daß meine Prüfungsergebnisse zusammen mit meiner Matrikelnummer (ohne Namen) im Internet eingesehen werden können.

Darmstadt, 03.03.2003

Lösung von Aufgabe 1 (Kräfte- und Momentensatz):

Freikörperbilder:





Kinematik:

$$\dot x = \dot\psi\, r_3 = \dot\varphi\, r_2$$

Kinetik:

$$(m_1+m_2+m_3)\ddot x = F - H_2 \qquad (1)$$

$$\Theta_2\ddot\varphi = H_2 r_2 - H_3 r_2 \qquad (2)$$

$$\Theta_3\ddot\psi = + H_3 r_3 \qquad (3)$$

$$m_2\ddot x = P_0 - H_2 - N_3 \qquad (4)$$

Ausrechnung der Beschleunigung:

$$(1) + \frac{(2)}{r_2} + \frac{(3)}{r_3}: \qquad \left(m_1+m_2+m_3+\frac{\Theta_2}{r_2^2}+\frac{\Theta_3}{r_3^2}\right)\ddot x = F$$

$$\Longrightarrow \quad \ddot x = \frac{F}{m_1+m_2+m_3+\dfrac{\Theta_2}{r_2^2}+\dfrac{\Theta_3}{r_3^2}}$$

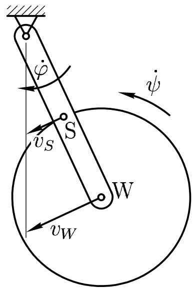
Spezialfall, Abheben für $N_3=0$, $H_3=0$:

$$(4) + \frac{(2)}{r_2}: \qquad \left(m_2+\frac{\Theta_2}{r_2^2}\right)\ddot x_0 = P_0$$

$$\Longrightarrow \quad \ddot x_0 = \frac{P_0}{m_2+\Theta_2/r_2^2}$$

Alternativ auch Betrachtung der Kugel alleine mit $N_3=0$ und $H_3=0$.

Lösung der Aufgabe 2 (Arbeitssatz):



Kinematik:

$$v_W = 2r\dot\varphi = r\,\dot\psi\,, \qquad v_S = r\dot\varphi \qquad \Longrightarrow \qquad \dot\psi = 2\dot\varphi$$

a) Potentielle Federenergie:

$$U_F = \frac{1}{2}c_T\Big[(\varphi-\varphi^*)+(\psi-\psi^*)\Big]^2 = \frac{9}{2}c_T\Big(\varphi-\frac{\pi}{2}\Big)^2$$

b) Reibarbeit:

$$W_{12}^* = -\int_0^{\varphi} M_R\,d\varphi = -M_R\,\varphi$$

c) Massengeometrie:

$$\Theta_S = \frac{1}{12}3m(2r)^2 = mr^2 \qquad \text{und} \qquad \Theta_W = \frac{1}{2}mr^2$$

Arbeitssatz:

$$U_1 + T_1 + W_{12}^* = U_2 + T_2$$

Energien:

$$U_1 = \frac{1}{2}c_T\,(\varphi^*+\psi^*)^2 = \frac{1}{2}c_T\Big(\frac{3\pi}{2}\Big)^2 = \frac{9}{8}\pi^2 c_T$$

$$T_1 = 0$$

$$U_2 = \frac{9}{2}c_T\Big(\varphi-\frac{\pi}{2}\Big)^2 - 3mgr\sin\varphi - mg2r\sin\varphi = \frac{9}{2}c_T\Big(\varphi-\frac{\pi}{2}\Big)^2 - 5mgr\sin\varphi$$

$$T_2 = \frac{1}{2}3m\,v_S^2 + \frac{1}{2}\Theta_S\,\dot\varphi^2 + \frac{1}{2}m\,v_W^2 + \frac{1}{2}\Theta_W\,\dot\psi^2 = 5mr^2\dot\varphi^2$$

Ausrechnung:

$$\frac{9}{8}\pi^2 c_T - M_R\,\varphi = \frac{9}{2}c_T\Big(\varphi-\frac{\pi}{2}\Big)^2 - 5mgr\sin\varphi + 5mr^2\dot\varphi^2$$

$$\dot\varphi^2 = \frac{5mgr\sin\varphi + \frac{9}{8}\pi^2 c_T - \frac{9}{2}c_T\Big(\varphi-\frac{\pi}{2}\Big)^2 - M_R\varphi}{5mr^2}$$

$$\ddot\varphi = \frac{5mgr\cos\varphi - \frac{9}{2}c_T\,2\Big(\varphi-\frac{\pi}{2}\Big) - M_R}{2\cdot 5mr^2}$$

d) $\ddot\varphi > 0$ für $\varphi = 0$:

$$\Longrightarrow \qquad M_R < M_R^* = \frac{9}{2}c_T\pi + 5mgr$$

Lösung der Aufgabe 3 MB und WI/MB (Relativbewegung)

a) Winkelgeschwindigkeit, kinetische Energie, Drall der Scheibe:

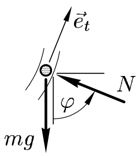
$$\vec\omega = \vec 0 \qquad \dot{\vec\omega} = \vec 0$$

$$\begin{aligned}
\vec v_S &= \dot\psi l(\cos\psi\,\vec e_\eta - \sin\psi\,\vec e_\xi) \qquad \text{bzw.} \qquad v_S = \dot\psi l\\
T &= \frac{1}{2}Mv_S^2 = \frac{1}{2}M\dot\psi^2 l^2\\
\vec L^{(S)} &= \Theta^S\vec\omega = \vec 0
\end{aligned}$$

b) Relativkinematik:

$$\begin{aligned}
\vec\rho &= b(\cos\varphi\,\vec e_\xi + \sin\varphi\,\vec e_\eta)\\
\vec v_{rel} &= b\dot\varphi(-\sin\varphi\,\vec e_\xi + \cos\varphi\,\vec e_\eta)\\
\vec a_{rel} &= b\ddot\varphi(-\sin\varphi\,\vec e_\xi + \cos\varphi\,\vec e_\eta) - b\dot\varphi^2(\cos\varphi\,\vec e_\xi + \sin\varphi\,\vec e_\eta)\\
\vec v_f &= \vec v_S + \vec\omega\times\vec\rho = \vec v_S = \text{siehe oben (wegen } \vec\omega = \vec 0\text{)}\\
\vec a_f &= \vec a_S + \dot{\vec\omega}\times\vec\rho + \vec\omega\times(\vec\omega\times\vec\rho) = \vec a_S\\
&= \ddot\psi l(\cos\psi\,\vec e_\eta - \sin\psi\,\vec e_\xi) - \dot\psi^2 l(\sin\psi\,\vec e_\eta + \cos\psi\,\vec e_\xi)\\
\vec a_{cor} &= 2\vec\omega\times\vec v_{rel} = \vec 0\\
\vec a &= \vec a_f + \vec a_{cor} + \vec a_{rel}\\
&= \vec e_\xi(-\ddot\psi l\sin\psi - \dot\psi^2 l\cos\psi - b\ddot\varphi\sin\varphi - b\dot\varphi^2\cos\varphi) +\\
&\quad\ \vec e_\eta(\ddot\psi l\cos\psi - \dot\psi^2 l\sin\psi + b\ddot\varphi\cos\varphi - b\dot\varphi^2\sin\varphi)
\end{aligned}$$

c) Kinetik der Punktmasse:



$$\begin{aligned}
\vec e_t &= \cos\varphi\,\vec e_\eta - \sin\varphi\,\vec e_\xi\\
ma_t &= -mg\sin\varphi\\
a_t &= \vec a\cdot\vec e_t =\\
&= (\ddot\psi l\cos\psi - \dot\psi^2 l\sin\psi + b\ddot\varphi\cos\varphi - b\dot\varphi^2\sin\varphi)\cos\varphi\\
&\quad -(-\ddot\psi l\sin\psi - \dot\psi^2 l\cos\psi - b\ddot\varphi\sin\varphi - b\dot\varphi^2\cos\varphi)\sin\varphi\\
&= \ddot\psi l(\cos\psi\cos\varphi + \sin\psi\sin\varphi) - \dot\psi^2 l(\sin\psi\cos\varphi - \cos\psi\sin\varphi) + b\ddot\varphi\\
&= \ddot\psi l\cos(\varphi-\psi) + \dot\psi^2 l\sin(\varphi-\psi) + b\ddot\varphi
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Longrightarrow \qquad \ddot\varphi &= -\frac{g}{b}\sin\varphi - \ddot\psi\frac{l}{b}(\cos\psi\cos\varphi + \sin\psi\sin\varphi) + \dot\psi^2\frac{l}{b}(\sin\psi\cos\varphi - \cos\psi\sin\varphi)\\
&= -\frac{g}{b}\sin\varphi - \ddot\psi\frac{l}{b}\cos(\varphi-\psi) - \dot\psi^2\frac{l}{b}\sin(\varphi-\psi)
\end{aligned}$$

Lösung der Aufgabe 3 BI (Hydrodynamik)

a) Berechnung von v_2:
Energieerhaltung

$$p_0 + \rho g h_0 = p_0 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g h_2$$

$$\Longrightarrow \quad v_2 = \sqrt{2g(h_0 - h_2)}$$

b) Berechnung von $A_{1,min}$:
Kontinuität

$$v_1 A_1 = v_2 A_2$$

$$\Longrightarrow \quad v_1 = \frac{A_2}{A_1}\sqrt{2g(h_0 - h_2)}$$

Energieerhaltung:

$$p_0 + \rho g h_0 = p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2$$

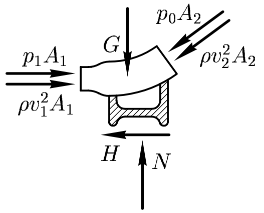
$$\Longrightarrow \quad p_1 = p_0 + \rho g h_0 - \frac{1}{2}\rho\Big(\frac{A_2}{A_1}\Big)^2 2g(h_0 - h_2) = p_0 + \rho g\Big\{h_0\Big[1 - \Big(\frac{A_2}{A_1}\Big)^2\Big] + \Big(\frac{A_2}{A_1}\Big)^2 h_2\Big\}$$

Keine Kavitation für $p_1 > 0$:

$$\Longrightarrow \quad p_0 + \rho g h_0 \ > \ \rho g\Big(\frac{A_2}{A_1}\Big)^2 (h_0 - h_2) \quad \Longrightarrow \quad A_1^2 \ > \ \frac{\rho g(h_0 - h_2)}{p_0 + \rho g h_0} A_2^2$$

c) Kräfte auf Rohrkrümmer und Haltekräfte:

Freikörperbild:



Impulssatz:

$$\uparrow \ : \quad N - G - (p_0 + \rho v_2^2)A_2 \sin\alpha = 0$$

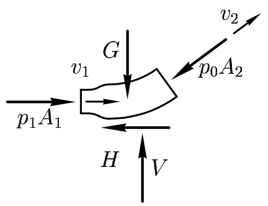
$$\leftarrow \ : \quad H - (p_1 + \rho v_1^2)A_1 + (p_0 + \rho v_2^2)A_2 \cos\alpha = 0$$

Ausrechnung:

$$N = G + (p_0 + \rho v_2^2)A_2 \sin\alpha$$

$$H = (p_1 + \rho v_1^2)A_1 - (p_0 + \rho v_2^2)A_2 \cos\alpha$$

Alternative:



Impulssatz:

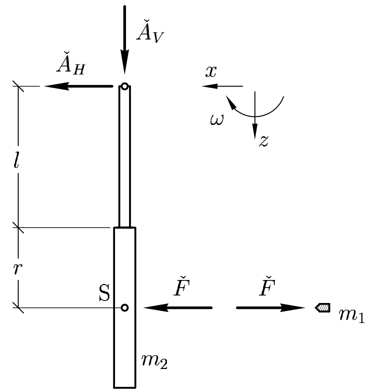
$$\uparrow \ : \quad V - G - p_0 A_2 \sin\alpha = \dot m v_2 \sin\alpha$$

$$\rightarrow \ : \quad -H + p_1 A_1 - p_0 A_2 \cos\alpha = \dot m v_2 \cos\alpha - \dot m v_1$$

Ausrechnung wie oben

Lösung der Aufgabe 4 (Stoß)

Freikörperbilder:



Kinetik:

$$\leftarrow: \quad m_1(\overline{v}_1 - v_1) = -\check F \qquad (1)$$

$$\leftarrow: \quad m_2 \overline{v}_{2S} = \check F + \check A_H \qquad (2)$$

$$M^{(A)}: \quad \Theta_y^A \overline{\omega} = \check F(l + r) \qquad (3)$$

$$\downarrow: \quad 0 = \check A_V \qquad (4)$$

Kinematik:

$$\overline{v}_{2S} = \overline{\omega}\,(l + r) \qquad (5)$$

Stoßhypothese:

$$e = -\frac{\overline{v}_{2S} - \overline{v}_1}{0 - v_1} = 0 \qquad (6)$$

Ausrechnung:

a) Massengeometrie:

$$\Theta_y^A = \Theta_y^S + m_2(l + r)^2 = m_2\Big[\frac{1}{4}r^2 + (l + r)^2\Big] = m_2\Big[\frac{5}{4}r^2 + 2lr + l^2\Big] \qquad (7)$$

b) Bewegungszustand nach dem Stoß:

aus (6) und (5): $\overline{v}_{2S} = \overline{v}_1 = \overline{\omega}(l + r)$ (8)

(1)$(l + r)$ + (3): $m_1(\overline{v}_1 - v_1)(l + r) + \Theta_y^A \overline{\omega} = 0$ (9)

mit (8): $m_1 \overline{\omega}(l + r)^2 - m_1 v_1 (l + r) + \Theta_y^A \overline{\omega} = 0$ (10)

$$\Longrightarrow \quad \overline{\omega} = \frac{m_1 v_1 (l + r)}{\Theta_y^A + m_1(l + r)^2} \qquad (11)$$

c) Kraftstöße:

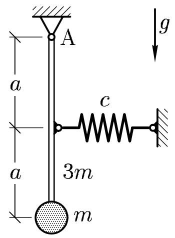
aus (4): $\check A_V = 0$

(1) + (2): $\check A_H = m_1(\overline{v}_1 - v_1) + m_2 \overline{v}_{2S}$

mit (8) und (11): $\check A_H = \overline{\omega}(l + r)(m_1 + m_2) - m_1 v_1 = \dfrac{m_2(l + r)^2 - \Theta_y^A}{m_1(l + r)^2 + \Theta_y^A} m_1 v_1$

Aufgabe 5a (6 Punkte)

Ein Pendelschwinger besteht aus einem homogenen starren Stab (Masse $3m$, Länge $2a$), einer Punktmasse (Masse m) und einer Feder (Steifigkeit c).



Welches ist das richtige Massenträgheitsmoment Θ^A des Pendels um den Aufhängepunkt A?

- ☐ $\Theta^A = ma^2$
- ☐ $\Theta^A = 4ma^2$
- ☐ $\Theta^A = 2ma^2$
- ☐ $\Theta^A = 8ma^2$

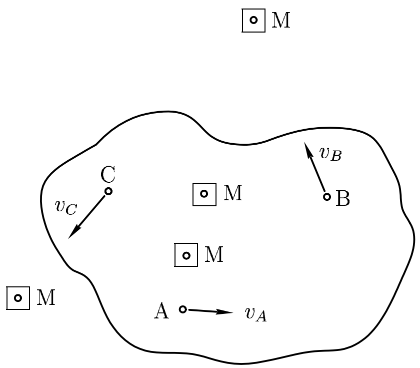
Welches ist die richtige Eigenkreisfrequenz ω_0 der kleinen Pendelschwingungen um die vertikale Gleichgewichtslage?

- ☐ $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{ca - 5mg}{4ma}}$
- ☐ $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{c}{4m}}$
- ☐ $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{ca + 5mg}{8ma}}$
- ☐ $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{4ma}{ca + 5mg}}$

Aufgabe 5b (3 Punkte)

Ein Starrkörper bewegt sich in der Ebene. Dabei werden in den Punkten A, B und C die Geschwindigkeiten nach Größe und Richtung gemessen.

Kreuzen Sie in der Zeichnung den richtigen Momentanpol M der ebenen Bewegung an.



Aufgabe 5c (3 Punkte)

Ein Aufzug hebt eine Last nach dem gegebenen Geschwindigkeits-Zeit-Diagramm.

Kreuzen Sie den richtigen Zeitverlauf der Seilkraft S an.