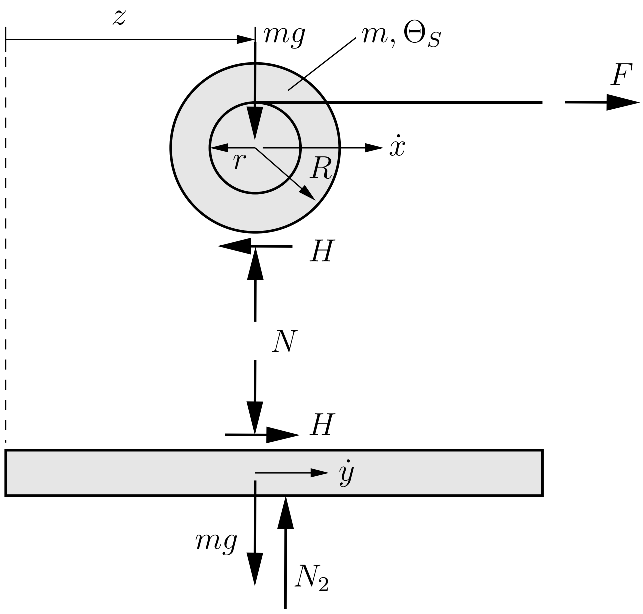
Musterlösungen
TM III

Diplomvorprüfung Technische Mechanik

Herbst 2004

Aufgabe III-1 [18 Punkte]



a) Kinematik:

$$\begin{aligned} \dot z &= \dot x - \dot y \\ \dot z &= R\dot\varphi \qquad (1) \end{aligned}$$

Kinetik:

$$\begin{aligned} \Theta_S\,\ddot\varphi &= rF + RH && (2)\\ m\ddot x &= F - H && (3)\\ m\ddot y &= H && (4) \end{aligned}$$

Ausrechnung:

$$\begin{aligned}
&(2)\text{ mit }(1) & \tfrac{1}{2}\,m(\ddot x-\ddot y) &= \alpha F + H && (5)\\
&(5)+(3) & \tfrac{3}{2}\,m\ddot x - \tfrac{1}{2}\,m\ddot y &= F(\alpha+1) && (6)\\
&-(5)+(4) & -\tfrac{1}{2}\,m\ddot x + \tfrac{3}{2}\,m\ddot y &= -\alpha F && (7)\\
&\tfrac{1}{m}(6\,(6)+2\,(7)) & 8\ddot x &= \tfrac{F}{m}(6\alpha+6-2\alpha)\\
& & \ddot x &= \tfrac{F}{m}\tfrac{1}{4}(2\alpha+3)\\
&\text{mit }(3),(4) & \ddot y &= \tfrac{F}{m} - \ddot x = \tfrac{F}{m}\tfrac{1}{4}(1-2\alpha)
\end{aligned}$$

b) $\ddot z = \ddot x - \ddot y = \frac{F}{m}\frac{1}{4}(4\alpha+2) = \frac{F}{m}\frac{1}{2}(2\alpha+1)$

Zeitintegration ($\dot z_0 = 0, z_0 = 0$):

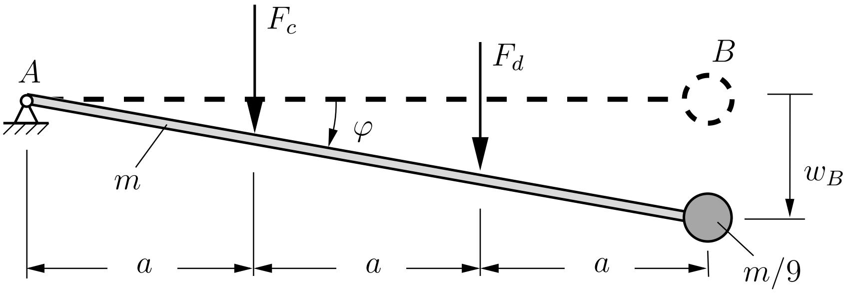
$$\begin{aligned} \dot z &= \tfrac{F}{m}\tfrac{1}{2}(2\alpha+1)t\\ z &= \tfrac{F}{m}\tfrac{1}{4}(2\alpha+1)t^2 \end{aligned}$$

Bedingung: $z(t^\star) = 9r$ 1 $\Rightarrow\quad t^\star = \sqrt{\dfrac{9R}{\frac{F}{m}\frac{1}{4}(2\alpha+1)}} = 6\sqrt{\dfrac{mR}{F(2\alpha+1)}}$

c) Für $\ddot y < 0 \Leftrightarrow \alpha > 1/2$ gleitet das Brett nach links.

Aufgabe III-2 [20 Punkte]

a) FKB:



Massenträgheitsmoment: $$\Theta_A = \frac{m(3a)^2}{3} + \frac{m}{9}(3a)^2 = 4ma^2 \tag{1}$$

Kräfte: $$F_c = c(u - \varphi a) \tag{2}$$

$$F_d = d\dot{\varphi}2a \tag{3}$$

Momentensatz: $$\Theta_A \ddot{\varphi} = aF_c + 2aF_d \tag{4}$$

$$\Rightarrow \quad 4ma^2\ddot{\varphi} + 4da^2\dot{\varphi} + ca^2\varphi = ca\widehat{u}\sin(\Omega t) \tag{5}$$

Bewegungsgleichung: $$\ddot{\varphi} + \underbrace{\frac{d}{m}}_{=2\delta}\dot{\varphi} + \underbrace{\frac{c}{4m}}_{=\omega^2}\varphi = \frac{c}{4m}\underbrace{\frac{\widehat{u}}{a}}_{:=\widehat{\psi}}\sin(\Omega t) \tag{6}$$

b) Eigenkreisfrequenz: $$\omega = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{c}{m}} \tag{7}$$

c) Eingeschwungener Zustand:

$$\varphi_p = \widehat{\psi}\, V \sin(\Omega t - \gamma) \qquad \text{mit} \quad \widehat{\psi} = \widehat{u}/a \tag{8}$$

Amplitude: $$\widehat{w}_B \;=\; 3a\,\widehat{\psi}\, V \tag{9}$$

Vergrößerungsfunktion:

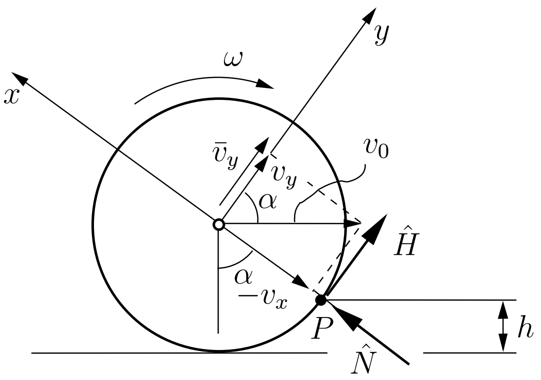
mit: $$\eta = \sqrt{2}\,, \quad \delta = \frac{d}{2m} = \frac{\sqrt{3}}{2}\,\Omega \tag{10}$$

$$D \;=\; \frac{\delta}{\omega} = \frac{\sqrt{3}}{2}\,\frac{\Omega}{\omega} = \sqrt{\frac{3}{8}} \tag{11}$$

$$V \;=\; \frac{1}{\sqrt{(1-\eta^2)^2 + 4D^2\eta^2}} = \frac{1}{\sqrt{(1-2)^2 + 4\frac{3}{8}2}} = \frac{1}{2} \tag{12}$$

Amplitude: $$\widehat{w}_B = \frac{3}{2}\,\widehat{u} \tag{13}$$

Aufgabe III-3 [25 Punkte]



a)
Impulssatz in y-Richtung:

$$\widehat{H} = m\,(\overline{v}_y - v_y) \tag{1}$$

Drallsatz:

$$-\widehat{H}r = \Theta_S\,(\overline{\omega} - \omega) \tag{2}$$

Geometrie:

$$\begin{aligned}
\cos\alpha &= \frac{r-h}{r} \\
v_y &= v_0 \cos\alpha \\
\Rightarrow\ v_y &= v_0 \left(- \frac{h}{r} \right)
\end{aligned}$$

Rollbedingung:

$$\omega = \frac{v_0}{r}$$

Kinematik:

$v_{Px} = v_x$, $\quad \overline{v}_{Px} = \overline{v}_x$, $\quad v_{Py} = v_y - r\omega$, $\quad \overline{v}_{Py} = \overline{v}_y - r\overline{\omega}$,

Stoßbedingung:

$$\begin{aligned}
e &= \frac{\overline{v}_{Px}}{v_{Px}} = 0 \\
\Rightarrow\ \overline{v}_{Px} &= e \cdot v_{Px} = 0 \\
\Rightarrow\ \overline{v}_{Px} &= 0 \\
\Rightarrow\ \underline{\underline{\overline{v}_x}} &= \underline{\underline{0}}
\end{aligned}$$

Haftbedingung des Punktes P :

$$\begin{aligned} \overline{v}_{Py} &= 0 \\ \Rightarrow \quad \overline{v}_y &= r \cdot \overline{\omega} \\ \Rightarrow \quad \overline{\omega} &= \frac{\overline{v}_y}{r} \end{aligned}$$

aus (1) und (2):

$$\begin{aligned} \Theta_S \left(\overline{\omega} - \omega\right) &= -m \left(\overline{v}_y - v_y\right) r \\ \frac{2}{5} m r^2 \left(\frac{\overline{v}_y}{r} - \frac{v_0}{r}\right) &= -m \left[\overline{v}_y - v_0 \left(1 - \frac{h}{r}\right)\right] r \\ \Rightarrow \underline{\underline{\overline{v}_y}} &= \underline{\underline{v_0 \left(1 - \frac{5}{7}\frac{h}{r}\right)}} \end{aligned}$$

Winkelgeschwindigkeit nach dem Stoß:

$$\underline{\underline{\overline{\omega}}} = \underline{\underline{\frac{v_0}{r}\left(1 - \frac{5}{7}\frac{h}{r}\right)}}$$

b)
Gesamtenergie unmittelbar vor dem Stoß:

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2} m v_0^2 + \frac{1}{2}\Theta_S \omega^2 \\ &= \frac{1}{2} m v_0^2 + \frac{1}{2}\frac{2}{5} m r^2 \left(\frac{v_0}{r}\right)^2 \\ &= \frac{7}{10} m v_0^2 \end{aligned}$$

Gesamtenergie unmittelbar nach dem Stoß:

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2} m \overline{v}_x^2 + \frac{1}{2} m \overline{v}_y^2 + \frac{1}{2}\Theta_S \overline{\omega}^2 \\ &= \frac{1}{2} m \overline{v}_y^2 + \frac{1}{2}\frac{2}{5} m \overline{v}_y^2 \\ &= \frac{7}{10} m \overline{v}_y^2 \\ &= \frac{7}{10} m v_0^2 \left(1 - \frac{5}{7}\frac{h}{r}\right)^2 \end{aligned}$$

Energieverlust:

$$\Delta E = E - \overline{E} = m v_0^2 \frac{h}{r}\left(1 - \frac{5}{14}\frac{h}{r}\right)$$

c)
Maximale Flugbahnhöhe resultiert aus maximaler vertikalen Abfluggeschwindigkeit $\overline{v}_V$:

$$\overline{v}_V = \overline{v}_y \sin\alpha\,, \qquad \sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = \sqrt{2\frac{h}{r} - \frac{h^2}{r^2}}$$

$$\overline{v}_V = \overline{v}_y \frac{\sqrt{2hr - h^2}}{r} = v_0\left(1 - \frac{5}{7}\frac{h}{r}\right)\sqrt{2\frac{h}{r} - \left(\frac{h}{r}\right)^2}$$

$$\overline{v}_V = v_0\left(1 - \frac{5}{7}\gamma\right)\sqrt{2\gamma - \gamma^2} \qquad \text{mit} \qquad \gamma := \frac{h}{r}$$

Extremalwertaufgabe zur Ermittlung der maximalen Flugbahnhöhe:

$$\frac{\mathrm{d}\overline{v}_V}{\mathrm{d}\gamma} = v_0\left[-\frac{5}{7}\sqrt{2\gamma - \gamma^2} + \left(1 - \frac{5}{7}\gamma\right)\frac{1-\gamma}{\sqrt{2\gamma - \gamma^2}}\right] = 0$$

$$\vdots$$

$$0 = \gamma^2 - \frac{11}{5}\gamma + \frac{7}{10}$$

$$\vdots$$

$$\gamma_{1,2} = \frac{1}{10}\left(11 \pm \sqrt{51}\right)$$

wegen $0 < \gamma < 1$ folgt

$$h_m = \frac{11 - \sqrt{51}}{10}\, r$$

$$(\ h_m = \approx 0.386\, r\ )$$

Aufgabe III-4a [22 Punkte] - **nur** für BI, Geo, Mathe

Stromlinie $\infty - 1 - 2 - 3$

a) Geschwindigkeit v_∞

Bernoullische Gleichung $\infty - 3$:

$$p_\infty + \rho g h_\infty + \frac{\rho}{2} v_\infty^2 = p_3 + \rho g h_3 + \frac{\rho}{2} v_3^2$$

$$\begin{aligned} \text{mit} \quad p_\infty &= p_0 + \rho g h \\ h_\infty &= -h \\ p_3 &= p_0 \\ h_3 &= H \\ \Longrightarrow \quad v_\infty^2 &= 2gH + v_3^2 \end{aligned}$$

Volumenstrom:

$$Q = A - 3v_3 \quad \Longrightarrow \quad v_3 = \frac{Q}{A_3}$$

$$\Longrightarrow \quad v_\infty = \sqrt{2gH + \left(\frac{Q}{A_3}\right)^2}$$

b) Druck p_1

Bernoullische Gleichung $\infty - 1$:

$$p_\infty + \rho g h_\infty + \frac{\rho}{2} v_\infty^2 = p_1 + \rho g h_1 + \frac{\rho}{2} v_1^2$$

$$\begin{aligned} \text{mit} \quad h_1 &= -h \\ v_1 &= \frac{Q}{A_1} \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \quad p_1 = p_0 + \rho g (h + H) + \frac{\rho}{2} Q^2 \left(\frac{1}{A_3^2} - \frac{1}{A_1^2}\right)$$

c) Siphonhöhe H_S

$H_S = H_S^{\max}$ bei $p_2 = 0$

Bernoullische Gleichung $\infty - 2$:

$$p_\infty + \rho g h_\infty + \frac{\rho}{2} v_\infty^2 = p_2 + \rho g h_2 + \frac{\rho}{2} v_2^2$$

$$\begin{aligned} \text{mit} \quad h_2 &= H_S^{\max} \\ v_2 &= \frac{Q}{A_2} \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \quad H_S^{\max} = H + \frac{p_0}{\rho g} + \frac{1}{2g} Q^2 \left(\frac{1}{A_3^2} - \frac{1}{A_2^2}\right)$$

Aufgabe **nur** für BI, Geo, Mathe

Aufgabe III-4b [22 Punkte] - **nicht** für BI, Geo, Mathe

a) Geschwindigkeit im Relativsystem:
Relativlage:

$$\boldsymbol{\varrho} = R\cos\varphi\boldsymbol{e}_\xi + R\sin\varphi\boldsymbol{e}_\eta$$

Winkelgeschwindigkeit des Koordinatensystems:

$$\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{KS}} = \Omega\boldsymbol{e}_\zeta$$

Relativgeschwindigkeit:

$$\boldsymbol{v}_{rel} = \frac{\mathrm{d}_{\mathrm{rel}}\boldsymbol{\varrho}}{\mathrm{d}t} = -R\dot{\varphi}\sin\varphi\boldsymbol{e}_\xi + R\dot{\varphi}\cos\varphi\boldsymbol{e}_\eta$$

Absolutgeschwindigkeit:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{v} &= \boldsymbol{v}_A + \boldsymbol{\omega}_{KS}\times\boldsymbol{\varrho} + \boldsymbol{v}_{\mathrm{rel}}\\ &= \Omega R\boldsymbol{e}_\eta + \Omega R\left(\cos\varphi\boldsymbol{e}_\eta - \sin\varphi\boldsymbol{e}_\xi\right) + R\dot{\varphi}\left(\cos\varphi\boldsymbol{e}_\eta - \sin\varphi\boldsymbol{e}_\xi\right)\\ &= -R\left(\dot{\varphi}+\Omega\right)\sin\varphi\boldsymbol{e}_\xi + R\left[\Omega + \left(\dot{\varphi}+\Omega\right)\cos\varphi\right]\boldsymbol{e}_\eta\end{aligned}$$

b) Beschleunigung im Relativsystem:
Relativbeschleunigung:

$$\boldsymbol{a}_{\mathrm{rel}} = \frac{\mathrm{d}_{\mathrm{rel}}\boldsymbol{v}_{\mathrm{rel}}}{\mathrm{d}t} = R\left(-\ddot{\varphi}\sin\varphi - \dot{\varphi}^2\cos\varphi\right)\boldsymbol{e}_\xi + R\left(\ddot{\varphi}\cos\varphi - \dot{\varphi}^2\sin\varphi\right)\boldsymbol{e}_\eta$$

Coriolisbeschleunigung:

$$\boldsymbol{a}_{cor} = 2\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{KS}}\times\boldsymbol{v}_{\mathrm{rel}} = -2\Omega R\dot{\varphi}\left(\cos\varphi\boldsymbol{e}_\xi + \sin\varphi\boldsymbol{e}_\eta\right)$$

Führungsbeschleunigung:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}_f &= \boldsymbol{a}_{\mathrm{A}} + \dot{\boldsymbol{\omega}}_{\mathrm{KS}}\times\boldsymbol{\varrho} + \boldsymbol{\omega}_{\mathrm{KS}}\times\left(\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{KS}}\times\boldsymbol{\varrho}\right)\\ &= -\Omega^2R\boldsymbol{e}_\xi + R\Omega^2\boldsymbol{e}_\zeta\times\left(\cos\varphi\boldsymbol{e}_\eta - \sin\varphi\boldsymbol{e}_\xi\right)\\ &= -\Omega^2R\left[\left(1+\cos\varphi\right)\boldsymbol{e}_\xi + \sin\varphi\boldsymbol{e}_\eta\right]\end{aligned}$$

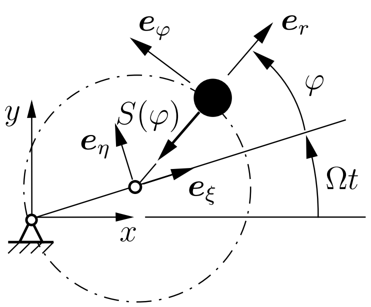
Absolutbeschleunigung:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a} &= \boldsymbol{a}_{\mathrm{f}} + \boldsymbol{a}_{\mathrm{cor}} + \boldsymbol{a}_{\mathrm{rel}}\\ &= R\left[-\left(\dot{\varphi}+\Omega\right)^2\cos\varphi - \Omega^2 - \ddot{\varphi}\sin\varphi\right]\boldsymbol{e}_\xi + R\left[-\left(\dot{\varphi}+\Omega\right)^2\sin\varphi + \ddot{\varphi}\cos\varphi\right]\boldsymbol{e}_\eta\end{aligned}$$

Aufgabe **nicht** für BI, Geo, Mathe

c) Stangenkraft:

Freikörperbild:



Beschleunigungskomponenten:

$$\begin{aligned} a_r &= a_\xi \cos\varphi + a_\eta \sin\varphi \\ &= -R\left[(\dot\varphi + \Omega)^2 + \Omega^2\cos\varphi\right] \\ a_\varphi &= -a_\xi \sin\varphi + a_\eta\cos\varphi \\ &= R\left[\Omega^2 \sin\varphi + \ddot\varphi\right] \end{aligned}$$

Kräftsatz:

$$\begin{aligned} ma_r &= -S(\varphi) \\ ma_\varphi &= 0 \end{aligned}$$

Einsetzen:

$$\ddot\varphi = -\Omega^2 \sin\varphi$$

$$\ddot\varphi = \frac{\mathrm{d}\dot\varphi}{\mathrm{d}\varphi}\dot\varphi = -\Omega^2\sin\varphi$$

$$\int_0^{\dot\varphi} \dot\varphi\,\mathrm{d}\dot\varphi = -\Omega^2 \int_{\pi/2}^{\varphi} \sin\varphi \mathrm{d}\varphi$$

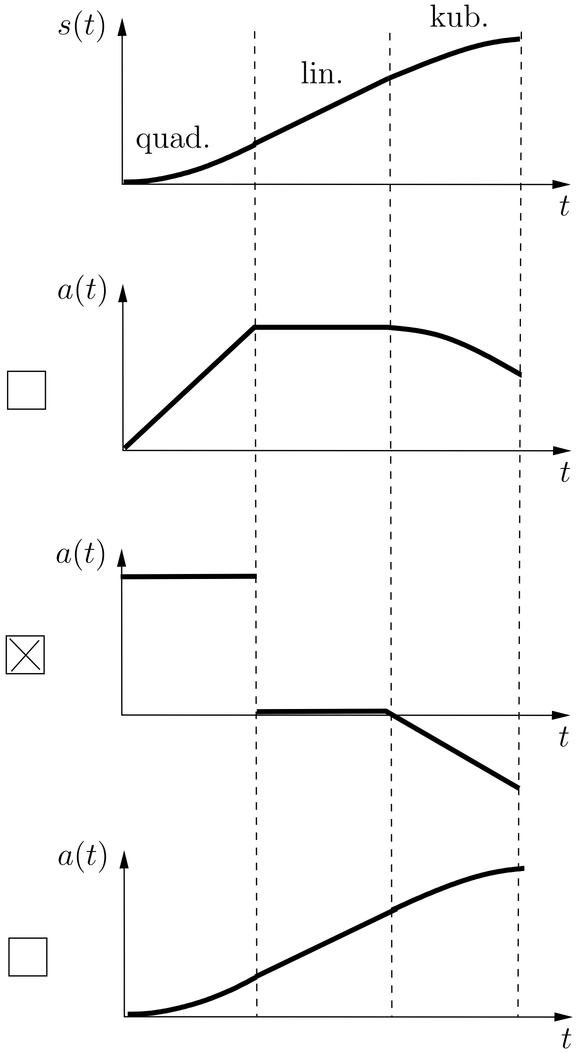
$$\Rightarrow\ \dot\varphi^2 = 2\Omega^2\cos\varphi$$

Stabkraft:

$$S(\varphi) = -ma_r = mR\left[(\dot\varphi+\Omega)^2 + \Omega^2\cos\varphi\right]$$

Kurzfrage Ⅲ-1 [2 Punkte]

Welcher der skizzierten Beschleunigung-Zeit-Verläufe $a(t)$ gehört zu dem gegebenen Weg-Zeit-Verlauf $s(t)$?
Kreuzen Sie an!



Kurzfrage Ⅲ-2 [4 Punkte]

Welche der angegebenen Einheiten gehören zu den physikalischen Größen?
Kreuzen Sie an!

	$\frac{\text{kg m}}{\text{s}^2}$	N s	N s^2 m	W s	$\frac{\text{N s}^2}{\text{kg m}}$	keine davon
Geschwindigkeit v						×
Impuls p		×				
Stoßzahl e					×	
Energie E				×		
Kraft F	×					
Massenträgheitsmoment Θ			×			

jede falsche oder fehlende Antwort max.

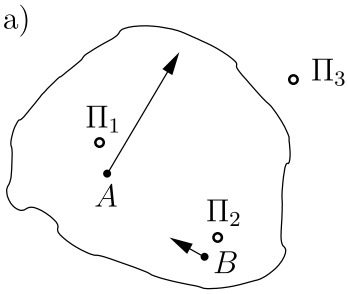
Kurzfrage III-3 [3 Punkte]

Die Pfeile kennzeichnen die Richtungen der Geschwindigkeiten der Punkte A und B. Geben Sie an, ob der gezeigte Geschwindigkeitszustand möglich ist und falls ja, kennzeichnen Sie den zugehörigen Momentanpol Π.

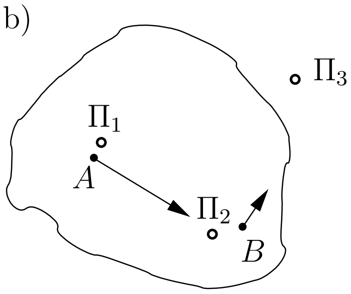
	Geschw. möglich	Π_1	Π_2	Π_3
a)	×		×	
b)				
c)	×			×

jeder Fehler max.

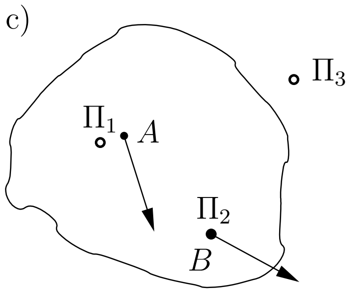
a)



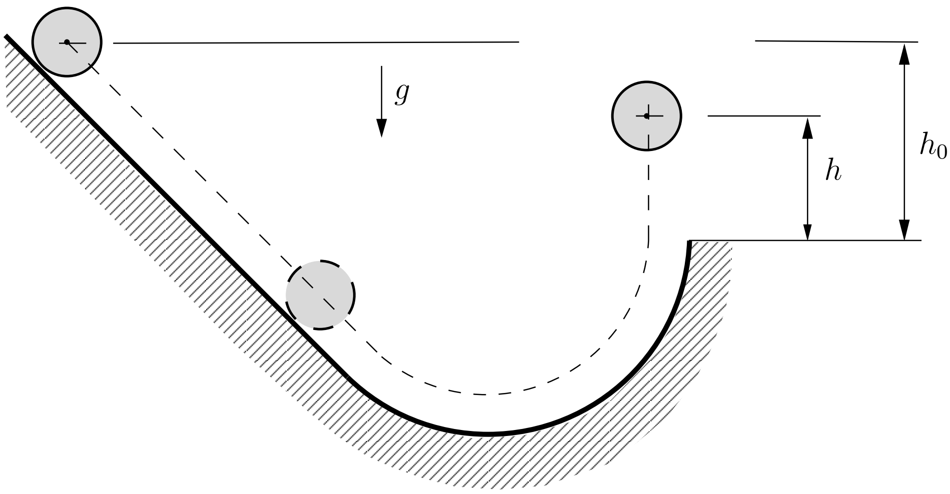
b)



c)



Kurzfrage III-4 [2 Punkte]



Eine homogene Walze *rollt* verlustfrei aus der Ruhe eine Rampe der Höhe h_0 hinunter. Im anschließenden senkrechten freien Flug erreicht sie die Höhe h.
Welche Aussage ist richtig?

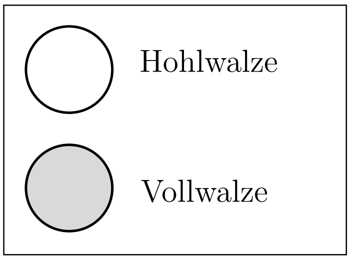
☐ $h = h_0$ ☒ $h = \frac{2}{3}h_0$ ☐ $h = \sqrt{2gh_0}$

Kurzfrage III-5 [4 Punkte]

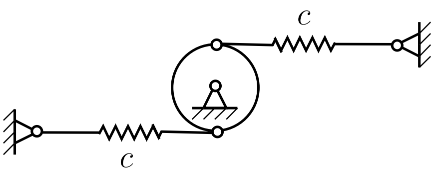
Die sechs Schwingungssysteme bestehen aus Hohl- bzw. Vollwalzen jeweils mit der Masse m und dem Radius r sowie den masselosen Federn mit der Federsteifigkeit c. Welche der Systeme haben die Eigenkreisfrequenz (Kennkreisfrequenz)

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{2c}{m}} \ ?$$

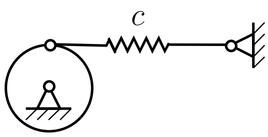
Kreuzen Sie an!



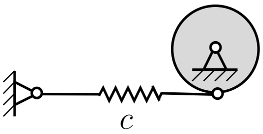
[x]



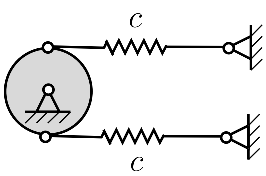
[ ]



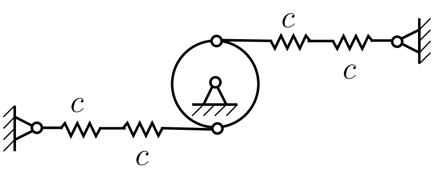
[x]



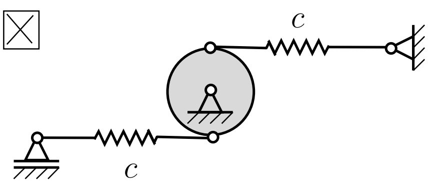
[ ]



[ ]



[x]



jede falsche oder fehlende Antwort max.