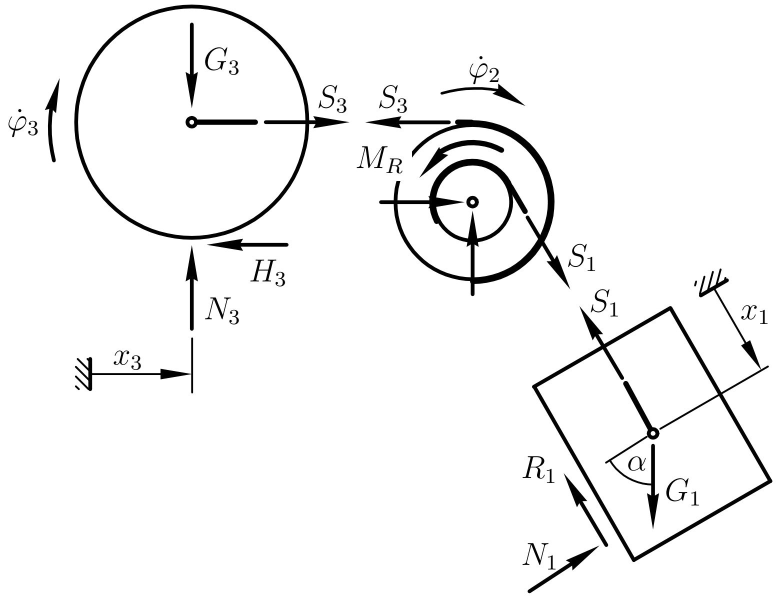
Aufgabe 1 [22 Punkte]

Freikörperbilder:



③

Kinetik:

$$\searrow: \quad m_1\ddot{x}_1 = -S_1 - R_1 + m_1 g\sin\alpha \qquad (1)$$ ②

$$\nearrow: \quad 0 = N_1 - m_1 g\cos\alpha \qquad (2)$$ ②

$$\curvearrowright: \quad \Theta_2\ddot{\varphi}_2 = S_1 r - S_3 2r - M_R \qquad (3)$$ ②

$$\curvearrowright: \quad \Theta_3\ddot{\varphi}_3 = H_3 3r \qquad (4)$$ ②

$$\rightarrow: \quad m_3\ddot{x}_3 = -H_3 + S_3 \qquad (5)$$ ②

Reibgesetz:

$$R_1 = \mu N_1 = \mu m_1 g\cos\alpha$$ ①

Kinematik:

$$\dot{x}_1 = \dot{\varphi}_2 r$$ ①

$$\dot{x}_3 = \dot{\varphi}_3 3\,r$$ ①

$$\dot{x}_3 = \dot{\varphi}_2 2\,r$$ ①

Auflösung:

$$\dot{\varphi}_2 = \frac{1}{r}\dot{x}_1$$ ①

$$\dot{\varphi}_3 = \frac{2}{3\,r}\dot{x}_1$$ ①

$$\dot{x}_3 = 2\,\dot{x}_1$$ ①

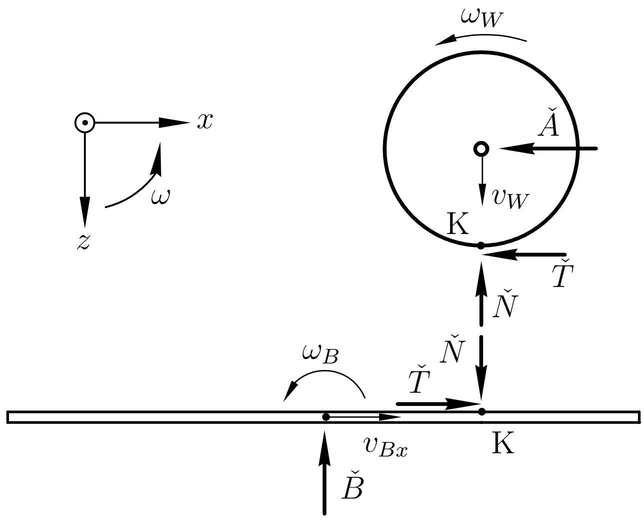
$$2\,[3\,r\,(5) + (4)] + 3\,(3) + 3\,r\,(1):$$

$$12\,r\,m_3\,\ddot{x}_1 + \frac{4}{3\,r}\Theta_3\,\ddot{x}_1 + \frac{3}{r}\Theta_2\,\ddot{x}_1 + 3\,r\,m_1\,\ddot{x}_1 = -3\,M_R - 3\,r\,\mu\,m_1\,g\,\cos\alpha + 3\,r\,m_1\,g\,\sin\alpha$$ ①

$$\ddot{x}_1 = \frac{3\,m_1\,r^2 g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha) - 3\,M_R\,r}{12\,r^2 m_3 + \frac{4}{3}\Theta_3 + 3\,\Theta_2 + 3r^2 m_1}$$ ①

Aufgabe 2 [21 Punkte]

Freikörperbild:



① ①

Kinetik:

$$\downarrow: \quad m_W\overline{v}_W - m_W v_W = -\check{N} \qquad (1)$$ ②

$$\curvearrowleft: \quad \Theta_W^S\overline{\omega}_W - \Theta_W^S\omega_W = -\check{T}\,r \qquad (2)$$ ②

$$\rightarrow: \quad m_B\overline{v}_{Bx} = \check{T} \qquad (3)$$ ②

$$\curvearrowleft: \quad \Theta_B^S\overline{\omega}_B = -\check{N}\,a \qquad (4)$$ ②

Kinematik:

$$\overline{v}_{BKx} = \overline{v}_{Bx}$$ ①

$$\overline{v}_{BKz} = -\overline{\omega}_B\,a$$ ①

$$\overline{v}_{WKz} = \overline{v}_W$$ ①

$$\overline{v}_{WKx} = \overline{\omega}_W\,r$$ ①

Stoßhypothese:

$$e = -\frac{\overline{v}_{WKz} - \overline{v}_{BKz}}{v_{WKz} - v_{BKz}} \qquad (5)$$ ①

Rauheit:

$$\overline{v}_{WKx} = \overline{v}_{BKx} \qquad (6)$$ ①

Massenträgheitsmomente:

$$\Theta_B^S = \frac{1}{12}m_B\,(4a)^2 = \frac{4}{3}m_B\,a^2\,, \qquad \Theta_W^S = \frac{1}{2}m_W\,r^2$$ ①

Auflösung:

$$(1)\,a - (4): \quad m_W\overline{v}_W\,a - m_W v_W\,a - \Theta_B^S\,\overline{\omega}_B = 0 \qquad (7)$$

$$(5): \quad e = 0 = -\frac{\overline{v}_W - (-\overline{\omega}_B\,a)}{v_W - 0} \qquad (8)$$ ①

$$(7) + m_W\,a\,v_W(8): \quad \overline{\omega}_B = \frac{-m_W\,v_W}{\left(\dfrac{4}{3}m_B + m_W\right)\,a^2}$$ ①

$$(6): \quad \overline{\omega}_W r = \overline{v}_{Bx} \qquad (9)$$

$$(2) + (3)\,r: \quad \Theta_W^S\,\overline{\omega}_W - \Theta_W^S\,\omega_W + \overline{v}_{Bx}m_B r = 0 \qquad (10)$$ ①

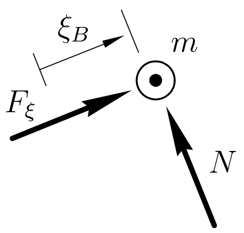
$$(9) \text{ in } (10): \quad \overline{v}_{Bx} = \omega_W\,r\,\frac{m_W}{2\,m_B + m_W}$$ ①

Aufgabe 3 [18 Punkte]

Kinematik:

$$
\begin{aligned}
\vec{\varrho} &= \xi_B \vec{e}_\xi + b\vec{e}_\eta = \widehat{u}\cos\Omega t\,\vec{e}_\xi + b\,\vec{e}_\eta && ②\\
\vec{v}_{rel} &= \dot{\xi}_B \vec{e}_\xi = -\Omega\widehat{u}\sin\Omega t\,\vec{e}_\xi && ①\\
\vec{a}_{rel} &= \ddot{\xi}_B \vec{e}_\xi = -\Omega^2\widehat{u}\cos\Omega t\,\vec{e}_\xi && ①\\
\vec{\omega} &= \omega\,\vec{e}_\zeta && ①\\
\dot{\vec{\omega}} &= \vec{0} && ①\\
\vec{a}_A &= -\omega^2\,a\,\vec{e}_\xi && ②\\
\vec{a}_f &= \vec{a}_A + \dot{\vec{\omega}}\times\vec{\varrho} + \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{\varrho}) = -\omega^2\left\{\xi_B + a\right\}\vec{e}_\xi - \omega^2\,b\,\vec{e}_\eta && ②\\
\vec{a}_c &= 2\vec{\omega}\times\vec{v}_{rel} = 2\omega\,\dot{\xi}_B\,\vec{e}_\eta && ②
\end{aligned}
$$

Freikörperbild:



②

Kräftesatz:

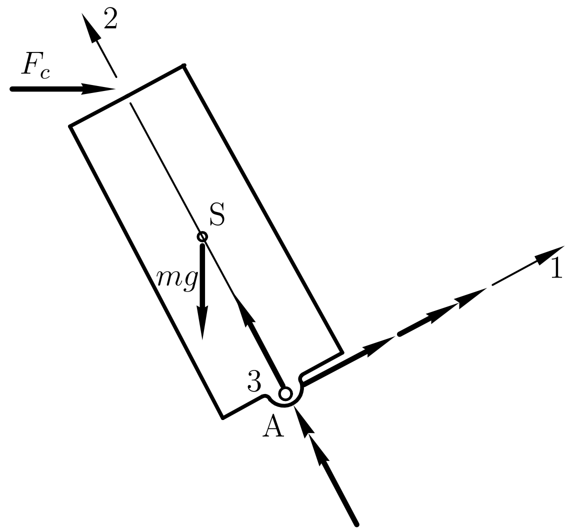
$$m\,a_\xi = m\left[\ddot{\xi}_B - \omega^2(\xi_B + a)\right] = F_\xi \qquad ②$$

Ausrechnung:

$$F_\xi = m\left\{-\omega^2 a - \widehat{u}\left(\Omega^2 + \omega^2\right)\cos\Omega t\right\} \qquad ②$$

Aufgabe 4 [19 Punkte]

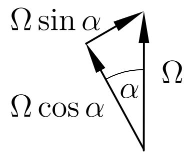
Freikörperbild: ②



Federkraft:

$$F_c = c\,l \sin\alpha$$ ①

Kinematik:



$$\begin{aligned} \omega_1 &= \Omega \sin\alpha \\ \omega_2 &= \Omega \cos\alpha \\ \omega_3 &= \dot{\alpha} \quad \text{bzw.} \quad 0 \end{aligned}$$ ②

Moment um A:

$$M_3^A = mg\frac{l}{2}\sin\alpha - F_c\, l\cos\alpha$$ ①

Eulersche Kreiselgleichung:

$$\Theta_3^A \dot{\omega}_3 - \omega_1\omega_2 \left(\Theta_1^A - \Theta_2^A\right) = M_3^A$$ ①

Massengeometrie:

$$\Theta_3^S = \frac{1}{12}\left(b^2 + l^2\right)$$ ①

$$\Theta_3^A = \frac{1}{12}\left(b^2 + l^2\right) + \frac{1}{4} m\, l^2 = m\left(\frac{1}{12} b^2 + \frac{1}{3} l^2\right)$$ ①

$$\Theta_1^A = \frac{1}{3} m\, l^2$$ ①

$$\Theta_2^A = \frac{1}{12} m\, b^2$$ ①

a) Stationäre Zustände:

$$\ddot{\alpha} = 0 \qquad \Longrightarrow$$

$$-\Omega^2 \sin\alpha\, \cos\alpha\ m\left(\frac{1}{3}\, l^2 - \frac{1}{12}\, b^2\right) = mg\frac{l}{2}\sin\alpha - c\, l^2 \sin\alpha\, \cos\alpha$$ ②

entweder $\sin\alpha = 0 \quad \Longrightarrow \quad \alpha = 0$ oder π

oder $\cos\alpha = \dfrac{mg\, l/2}{c\, l^2 - \Omega^2\, m\left(\dfrac{1}{3}\, l^2 - \dfrac{1}{12}\, b^2\right)} =: B$ ②

b)

$$|B| > 1 \quad \Longrightarrow \quad \text{keine Lösung} \quad \alpha \neq 0 \quad \text{bzw.} \quad \pi \Longrightarrow$$

$$\frac{c\,l^2 + mg\,l/2}{\frac{1}{3}m\,l^2 - \frac{1}{12}m\,b^2} < \Omega^2 < \frac{c\,l^2 - mg\,l/2}{\frac{1}{3}m\,l^2 - \frac{1}{12}m\,b^2}$$ ②

c) Instationär:

$$\Theta_3^A \ddot{\alpha} - \Omega_1 \Omega_2 \left(\Theta_1^A - \Theta_2^A\right) = M_3^A \qquad \Longrightarrow$$

$$\ddot{\alpha} = \frac{mg\frac{l}{2}\sin\alpha - \left\{c\,l^2 - \frac{1}{12}m\left(4\,l^2 - b^2\right)\,\Omega^2\right\}\sin\alpha\,\cos\alpha}{\frac{1}{12}m\left(b^2 + 4\,l^2\right)}$$

②

Aufgabe 3b [18 Punkte]

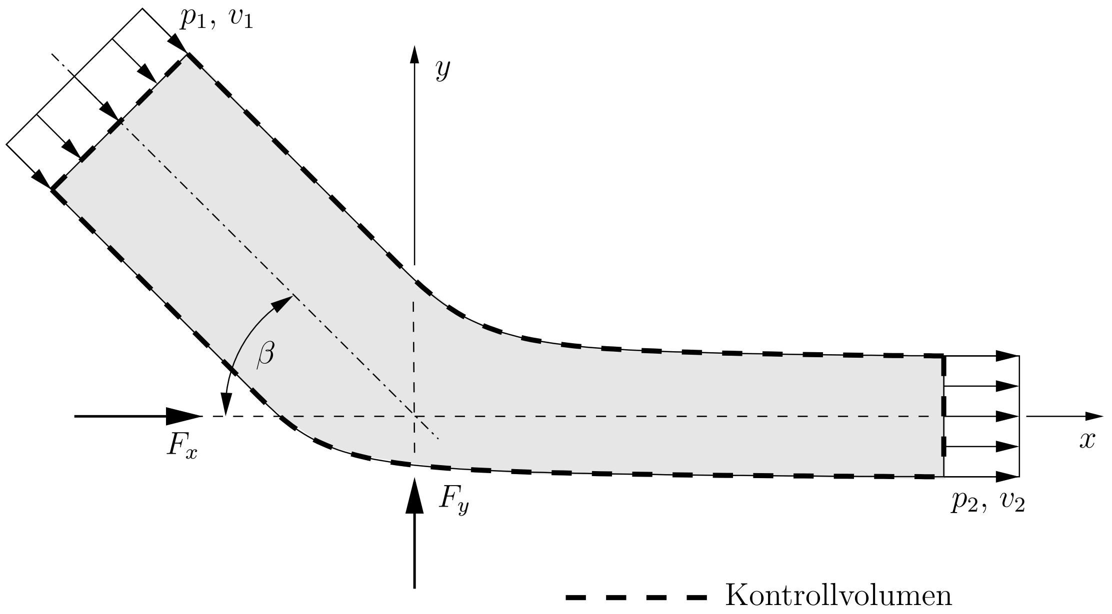
a) Kontinuitätsgleichung:

$$v_1 A_1 = v_2 A_2 \qquad \Longrightarrow \qquad v_2 = \frac{A_1}{A_2}\, v_1$$ ②

b) Bernoullische Gleichung:

$$\frac{\rho}{2}\, v_1^2 + p_1 = \frac{\rho}{2}\, v_2^2 + p_2 + \zeta\, \frac{\rho}{2}\, v_1^2 \qquad \Longrightarrow \qquad p_2 = p_1 + \frac{\rho}{2}\left(1 - \frac{A_1^2}{A_2^2} - \zeta\right) v_1^2$$ ④

c) $\dot m = \rho v_1 A_1$



②

$$\uparrow\ : \quad \dot m v_1 \sin\beta = F_y - p_1 A_1 \sin\beta$$ ③

$$\rightarrow : \quad \dot m\,(v_2 - v_1\cos\beta) = F_x - p_2 A_2 + p_1 A_1 \cos\beta$$ ③

$\Longrightarrow$

$$F_y = \left(\rho v_1^2 + p_1\right) A_1 \sin\beta$$ ②

$$F_x = \frac{\rho v_1^2 A_1^2}{A_2} - \rho v_1^2 A_1 \cos\beta + p_2 A_2 - p_1 A_1 \cos\beta$$ ①

$$= A_1 \left[\rho v_1^2 \left(\frac{A_1}{A_2} - \cos\beta\right) + \frac{p_2 A_2}{A_1} - p_1 \cos\beta\right]$$

$$= A_1 \left[\rho v_1^2 \left(\frac{A_1}{A_2} - \cos\beta + \frac{1}{2}\,\frac{A_2}{A_1} - \frac{1}{2}\,\frac{A_1}{A_2} - \frac{1}{2}\,\zeta\,\frac{A_2}{A_1}\right) - p_1 \cos\beta\right]$$

$$= A_1 \left[\frac{\rho v_1^2}{2} \left(\frac{A_1}{A_2} - 2\cos\beta + \frac{A_2}{A_1}\,(1-\zeta)\right) - p_1 \cos\beta\right]$$ ①

Aufgabe 4b [19 Punkte]

a)

Natürliche Koordinaten:

$$\vec{v} = v_0\,\vec{e}_t \quad (1)$$

Polarkoordinaten:

$$\vec{v} = \dot{r}\,\vec{e}_r + r\,\dot{\varphi}\,\vec{e}_\varphi \quad (1)$$

b) Winkelgeschwindigkeit aus Vergleich von $|\vec{v}|^2$:

$$\vec{v} = -a\frac{2\sin 2\varphi}{\sqrt{2\cos 2\varphi}}\,\dot{\varphi}\,\vec{e}_r + a\sqrt{2\cos 2\varphi}\,\dot{\varphi}\,\vec{e}_\varphi = \frac{2\,a\,\dot{\varphi}}{\sqrt{2\cos 2\varphi}}\,\{-\sin 2\varphi\,\vec{e}_r + \cos 2\varphi\,\vec{e}_\varphi\} \quad (2)$$

$$v_0^2 = \frac{4a^2\dot{\varphi}^2}{2\cos 2\varphi} \quad (2) \qquad \Longrightarrow$$

$$\dot{\varphi}^2 = \frac{v_0^2\,2\cos 2\varphi}{4\,a^2} \quad \Longrightarrow \quad \dot{\varphi} = \frac{v_0}{2\,a}\sqrt{2\cos 2\varphi} \quad (1)$$

Winkelbeschleunigung:

$$2\dot{\varphi}\ddot{\varphi} = -\frac{v_0^2}{4\,a^2}4\sin 2\varphi\,\dot{\varphi} \quad \Longrightarrow \quad \ddot{\varphi} = -\frac{v_0^2}{2\,a^2}\sin 2\varphi \quad (3)$$

c) Geschwindigkeit:

$$\vec{v} = \frac{2\,a\,\frac{v_0}{2\,a}\,\sqrt{2\cos 2\varphi}}{\sqrt{2\cos 2\varphi}}\,\{-\sin 2\varphi\vec{e}_r + \cos 2\varphi\vec{e}_\varphi\} = v_0\,\{-\sin 2\varphi\,\vec{e}_r + \cos 2\varphi\,\vec{e}_\varphi\} \quad (3)$$

$$\vec{e}_t = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = -\sin 2\varphi\,\vec{e}_r + \cos 2\varphi\,\vec{e}_\varphi \quad (2)$$

d)

in 0 keine Krümmung $\Longrightarrow$ $a_{n0} = 0$ (1)

$v_0 =$konstant $\Longrightarrow$ $a_{t0} = 0$ (1)

e)

$v_0 =$konstant $\Longrightarrow$ $a_t = 0$

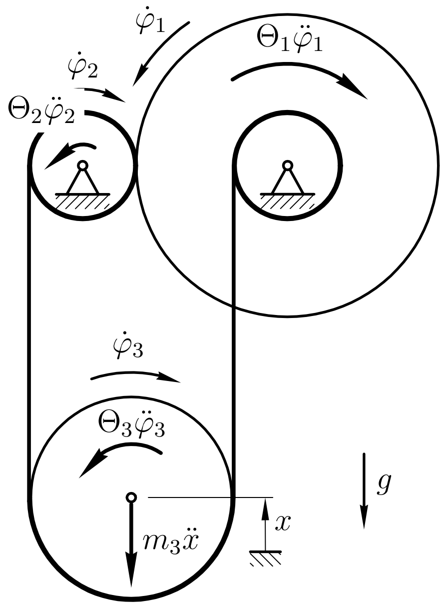
$$\Longrightarrow \quad a = a_n = \frac{v_0^2}{R} \quad (1)$$

a_n ist maximal, wenn R minimal ist, also ganz rechts bei

$$x_A = x_{max} = x(0) = \sqrt{2}\,a \quad (1)$$

Aufgabe K1 [7 Punkte]

Ein Hubsystem besteht aus mehreren Rollen, die mit einem Seil verbunden sind. Gegeben seien die in der Skizze genannten Größen.



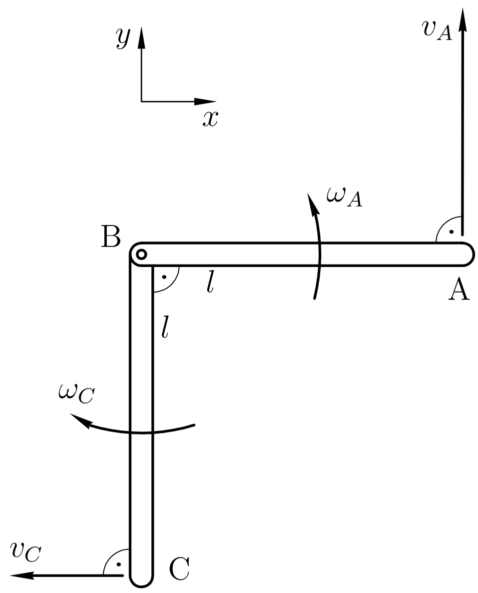
a) Zeichnen Sie alle d'Alembertschen Scheinkräfte und Scheinmomente (infolge der Trägheitswirkung) vorzeichenrichtig in das Hubsystem ein und geben Sie deren Größen an.

b) Geben Sie den Ausdruck für die kinetische Energie des Hubsystems an.

$$T = E_{\mathrm{kin}} = \frac{1}{2}\left(m_3\dot x^2 + \Theta_1\dot\varphi_1^2 + \Theta_2\dot\varphi_2^2 + \Theta_3\dot\varphi_3^2\right)$$

Aufgabe K2 [6 Punkte]

Zwei gleiche dünne Balken in der Ebene sind in B gelenkig verbunden. Die Geschwindigkeiten v_A und v_C der Endpunkte A und C sind vorgegeben, und es gilt $v_A = 2v_C$.



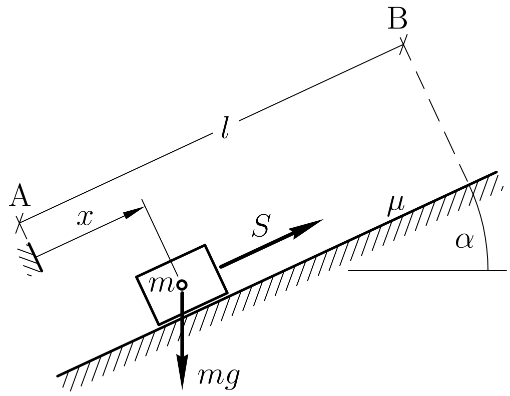
Kreuzen Sie die richtigen Aussagen für den momentanen Bewegungszustand an.

a) Der Punkt B
- ◯ bewegt sich nach links,
- ◯ bewegt sich nach rechts,
- ◯ bewegt sich nach oben,
- ◯ bewegt sich nach unten,
- ⊗ hat die Geschwindigkeit null,
- ◯ hat eine undefinierte Geschwindigkeit.

b) Für die Winkelgeschwindigkeit des Balkens A gilt
- ◯ $\omega_A = \omega_C$,
- ⊗ $\omega_A = 2\omega_C$,
- ◯ $\omega_A = \omega_C/2$,
- ◯ $\omega_A = -\omega_C$,
- ⊗ $\omega_A = v_A/l$,
- ⊗ $\omega_A = 2v_C/l$.

Aufgabe K3 [7 Punkte]

Eine Punktmasse m wird mit veränderlicher Geschwindigkeit eine rauhe schiefe Ebene hinaufgezogen. Die notwendige Zugkraft des Antriebs ist mit S bezeichnet.



Kreuzen Sie an.

a) Die momentane Antriebsleistung beträgt:

richtig	falsch	
	×	$P = \int\limits_{(l)} S\,dx$
	×	$P = Sx$
×		$P = S\dot{x}$
	×	$P = \mu mg\cos\alpha\,\dot{x}$
×		$P = m\left[\ddot{x} + \mu g\cos\alpha + g\sin\alpha\right]\dot{x}$

b) Die Reibarbeit entlang des Weges von A nach B beträgt:

richtig	falsch	
	×	$W^*_{\mathrm{AB}} = \int\limits_{(l)} m\ddot{x}\sin\alpha\,dx$
	×	$W^*_{\mathrm{AB}} = -\int\limits_{(l)} S\,dx$
×		$W^*_{\mathrm{AB}} = -\int\limits_{(l)} \mu mg\cos\alpha\,dx$
×		$W^*_{\mathrm{AB}} = -\mu mg\cos\alpha\,l$
	×	$W^*_{\mathrm{AB}} = \mu mgl$
	×	$W^*_{\mathrm{AB}} = Sl$

c) Der Unterschied der potentiellen Energien von B und A beträgt:

richtig	falsch	
	×	$\Delta U = Sl$
	×	$\Delta U = mgl\cos\alpha$
×		$\Delta U = mgl\sin\alpha$
	×	$\Delta U = \mu mgl\cos\alpha$