INSTITUT FÜR MECHANIK	Technische Universität Darmstadt
Prof. W. Becker Prof. D. Gross Prof. P. Hagedorn Prof. R. Markert Jun. Prof. R. Müller	**Prüfung** **Technische Mechanik III** am 27. Februar 2006

(Name) (Vorname) (Matr.-Nr.) (Studiengang)

(Platznummer)

Einverständniserklärung:
Ich stimme hiermit zu, dass meine Prüfungsergebnisse zusammen mit meiner Matrikelnummer (ohne Namen) im Internet eingesehen werden können.

Darmstadt, 27.02.2006

(Unterschrift)

Die Aufgaben sind nicht nach ihrem Schwierigkeitsgrad geordnet. Bitte beginnen Sie für jede Aufgabe ein neues Blatt und numerieren Sie die Blätter. Der Lösungsweg soll klar erkennbar sein, die Ergebnisse müssen deutlich hervorgehoben werden. Bei den durch K gekennzeichneten Kurzfragen sind lediglich Ergebnisse einzutragen.

Es ist erlaubt, eine handgeschriebene Formelsammlung im Umfang eines beidseitig beschriebenen DIN A4-Blattes, die Biegelinientafel, die Integrationstafel sowie das Hilfsblatt zur Torsion zu benutzen. Andere Hilfsmittel sind nicht erlaubt. Es wird ausdrücklich darauf hingewiesen, dass keinerlei elektronische Hilfsmittel benutzt werden dürfen. Hierzu zählen insbesondere Taschenrechner, Laptops und Handys.

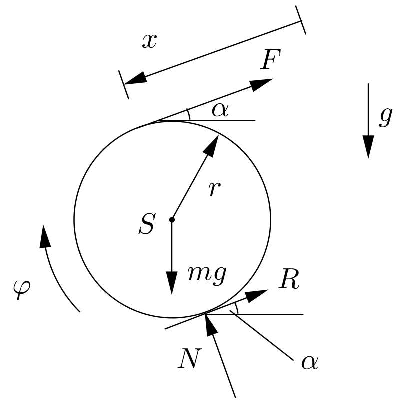
Achtung:
Aufgabe 3a ist für die Studiengänge BI, Mathematik und Geowissenschaften.
Aufgabe 3b ist für die Studiengänge MB, WIMB, MPE, CMPE, CE und Mechanik.

Viel Erfolg !

Aufgabe	1	2	3	4	K1	K2	K3	K4	$\sum$	Note
max. Punkte	19	20	21	25	3	4	3	5	100	
erreichte Punkte										
Hand-zeichen										

Aufgabe 1 [19 Punkte]

zu **a)** FKB



Bewegungsgleichungen

$$\swarrow: \quad m\ddot{x} = -F - R + mg\sin\alpha \tag{1}$$

$$\searrow: \quad 0 = -N + mg\cos\alpha \quad \Leftrightarrow \quad N = mg\cos\alpha \tag{2}$$

$$\overset{\frown}{S}: \quad \theta\ddot{\varphi} = Fr - Rr \tag{3}$$

Trägheitsmoment

$$\theta = \frac{1}{2}mr^2 \tag{4}$$

Kinematik

$$\dot{x} = r\dot{\varphi} \quad \Rightarrow \quad \ddot{x} = r\ddot{\varphi} \tag{5}$$

Reibgesetz

$$R = \mu N \tag{6}$$

$$(2) \text{ in } (6): \qquad R = \mu\, mg\cos\alpha \tag{7}$$

$$\big[(4),(7) \text{ in } (3)\big]\cdot\frac{1}{r}: \qquad F = \frac{1}{2}\,mr\,\ddot{\varphi} + \mu\, mg\cos\alpha \tag{8}$$

$$(5),(7) \text{ und } (8) \text{ in } (1) \qquad m\ddot{x} = -\frac{1}{2}m\ddot{x} - \mu mg\cos\alpha - \mu mg\cos\alpha + mg\sin\alpha$$

$$\Leftrightarrow \qquad \ddot{x} = \frac{2}{3}\,g(\sin\alpha - 2\mu\cos\alpha) \tag{9}$$

Integration von $\ddot{x}$:

$$\int \mathrm{d}\dot{x} = \int \frac{2}{3}(\sin\alpha - 2\mu\cos\alpha)g\mathrm{d}t$$

$$\Leftrightarrow \qquad \dot{x} = \frac{2}{3}(\sin\alpha - 2\mu\cos\alpha)g\,t + C_1 \tag{10}$$

Anfangsbedingungen: $\dot{x}(0) = 0$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\dot{x} = \frac{2}{3}(\sin\alpha - 2\mu\cos\alpha)g\,t} \tag{11}$$

zu **b)** Ab dem Zeitpunkt t_1 verschwindet die Seilkraft F:

$$\overset{\frown}{S} : \quad \frac{1}{2}mr^2\ddot{\varphi} = -Rr \tag{12}$$

$$\text{mit (7)} : \Rightarrow \quad \ddot{\varphi} = -\frac{2\mu g}{r}\cos\alpha \tag{13}$$

$$\text{(7) in (1)} : \Rightarrow \quad \ddot{x} = (\sin\alpha - \mu\cos\alpha)\,g \tag{14}$$

Integration von $\ddot{x}$ und $\ddot{\varphi}$:

$$\dot{x} = (\sin\alpha - \mu\cos\alpha)g\,t + C_3 \tag{15}$$

$$\dot{\varphi} = -\frac{2\mu g}{r}\cos\alpha\,t + C_4 \tag{16}$$

Anfangsbedingungen aus (10) und (5)

$$\dot{x}(t_1) = \frac{2}{3}(\sin\alpha - 2\mu\cos\alpha)g\,t_1 \tag{17}$$

$$\dot{\varphi}(t_1) = \frac{2}{3r}(\sin\alpha - 2\mu\cos\alpha)g\,t_1 \tag{18}$$

liefern die Konstanten C_3 und C_4 und damit $\dot{x}$ und $\dot{\varphi}$:

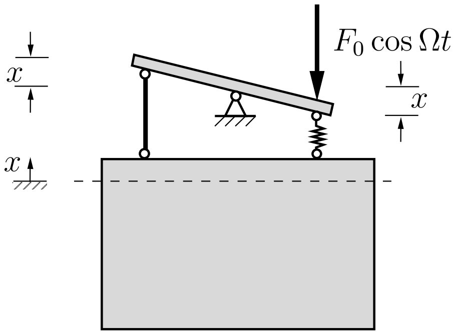
$$C_3 = -\frac{1}{3}(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)g\,t_1 \tag{19}$$

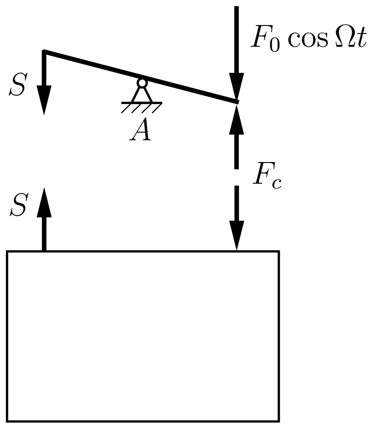
$$C_4 = \frac{2}{3r}(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)g\,t_1 \tag{20}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\dot{x} = (\sin\alpha - \mu\cos\alpha)g\,t - \frac{1}{3}(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)g\,t_1} \tag{21}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\dot{\varphi} = -\frac{2\mu g}{r}\cos\alpha\,t + \frac{2}{3r}(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)g\,t_1} \tag{22}$$

Aufgabe 2 [20 Punkte]





Bewegungsgleichung:

$$\uparrow: \quad m\,\ddot{x} = S - F_c$$

$$\overset{\curvearrowleft}{A}: \quad S a + (F_c - F_0 \cos \Omega t)\, a = 0 \quad \rightsquigarrow \quad S = -\,F_c + F_0 \cos \Omega t$$

Federkraft : $F_c = c\, x_c$

Kinematik : $x_c = 2x$

Einsetzen : $m\,\ddot{x} = -2 \cdot 2cx + F_0 \cos \Omega t$

$$\rightsquigarrow \quad \ddot{x} + \omega^2 x = \omega^2 x_0 \cos \Omega t$$

$$\omega^2 = \frac{4c}{m} \quad \rightsquigarrow \quad \underline{\underline{\omega = \sqrt{\frac{4c}{m}}}}$$

$$x_0 = \frac{F_0}{4c}$$

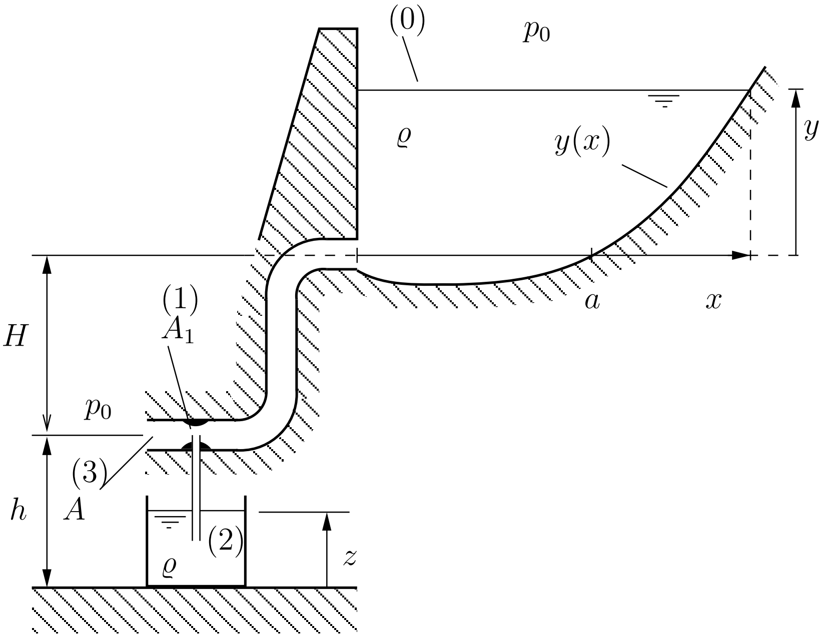
Eingeschwungener Zustand: $x = \widehat{x} \cos \Omega t$

$$\rightsquigarrow \quad \widehat{x} = x_0 \frac{1}{|1 - \eta^2|} \qquad \eta = \frac{\Omega}{\omega}$$

$$\rightsquigarrow \quad \underline{\underline{\widehat{x} = x_0 \frac{1}{3}}}$$

Aufgabe 3a [21 Punkte]

nur für BI, Mathe und Geo.



a) Bernoulli $0 \to 3$

$$\frac{1}{2}\varrho v_0^2 + p_0 + (y(x) + H)\varrho g = \frac{1}{2}\varrho v_3^2 + p_0 + 0\varrho g \tag{1}$$

Konti-Gleichung $0 \to 3$

$$v_0 x b = v_3 A \tag{2}$$

Berechnung:

$$(2) \rightsquigarrow \quad v_3 = v_0 \frac{xb}{A}$$

Einsetzen in (1)

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\varrho v_0^2 \left(1 - \frac{x^2 b^2}{A^2}\right) + \varrho g H &= -\varrho g y \\ y(x) &= \frac{1}{2g} v_0^2 \left(x^2 \frac{b^2}{A^2} - 1\right) - H \end{aligned} \tag{3}$$

b) Auflösen von (3) nach x und Einsetzen von $y = 0$:

$$x^2 = \left[(y + H)\frac{2g}{v_0^2} + 1\right] \frac{A^2}{b^2} \tag{4}$$

$$a = x(y = 0) = \frac{A}{b}\sqrt{(H)\frac{2g}{v_0^2} + 1}$$

c) Bernoulli $1 \to 3$

$$p_1 + \frac{1}{2}\varrho v_1^2 = p_0 + \frac{1}{2}\varrho v_3^2 \tag{5}$$

Konti $1 \to 3$

$$v_1 = \frac{A}{A_1} v_3 \tag{6}$$

Bernoulli $0 \to 3$ (s.a. Aufgabenteil a)

$$p_0 + \frac{1}{2}\varrho v_0^2 + \varrho g(H+y) = p_0 + \frac{1}{2}\varrho v_3^2 \tag{7}$$

Berechnung:

$$\begin{array}{lclcl}
(7) & \rightsquigarrow & v_3^2 & = & v_0^2 + 2g(y+H) \qquad \text{in } (6) \\
(6) & \rightsquigarrow & v_1^2 & = & \left(\frac{A}{A_1}\right)^2 (v_0^2 + 2g(y+H)) \qquad \text{in } (5) \\
(5) & \rightsquigarrow & p_1 & = & p_0 + \frac{1}{2}\varrho(v_3^2 - v_1^2) \\
 & & & = & p_0 + \frac{1}{2}\varrho\left(v_0^2 + 2g(y+H) - \frac{A^2}{A_1^2}v_0^2 - \frac{A^2}{A_1^2}2g(y+H)\right) \\
 & & & = & p_0 + \left(\frac{1}{2}\varrho v_0^2 + \varrho g(y+H)\right)\left(1 - \frac{A^2}{A_1^2}\right)
\end{array}$$

Alternativlösungen möglich! z.B.:

Bernoulli $0 \to 1$

Konti $0 \to 1$

und Gleichung (4)

dann braucht man v_3 nicht auszurechnen! Einsetzen

d) Hydrostatik

$$p_0 + \varrho g z = p_1 + \varrho g h \tag{8}$$

Mit den Ergebnissen aus c) folgt:

$$z = \left(\frac{v_0^2}{2g} + y + H\right)\left(1 - \frac{A^2}{A_1^2}\right) + h \tag{9}$$

Aufgabe 3b [21 Punkte]

nur für WI-MB, MB, MPE, CMPE, CE und Mechanik

Lösung mit Lagrangeschen Gleichungen 2. Art:
System mit zwei Freiheitsgraden, generalisierte Koordinaten x, φ

$$\begin{aligned}
E_k &= \frac{1}{2}m_1\left[(\dot{x}+l\dot{\varphi}\cos\varphi)^2+(l\dot{\varphi}\sin\varphi)^2\right]+\frac{1}{2}m_2\dot{x}^2+\frac{1}{2}m_3\dot{x}^2\\
&= \frac{3}{2}m\dot{x}^2+ml\dot{x}\dot{\varphi}\cos\varphi+\frac{1}{2}ml^2\dot{\varphi}^2\\
E_p &= -m_1gl\cos\varphi+\frac{1}{2}cx^2-m_3gx\\
&= \frac{1}{2}cx^2-mgx-mgl\cos\varphi\\
L = E_k - E_p &= \frac{3}{2}m\dot{x}^2+ml\dot{x}\dot{\varphi}\cos\varphi+\frac{1}{2}ml^2\dot{\varphi}^2-\frac{1}{2}cx^2+mgx+mgl\cos\varphi
\end{aligned}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_j}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_j}=0; \qquad j=1,2$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial\dot{x}} &= 3m\dot{x}+ml\dot{\varphi}\cos\varphi\\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{x}}\right) &= 3m\ddot{x}-ml\dot{\varphi}^2\sin\varphi+ml\ddot{\varphi}\cos\varphi\\
\frac{\partial L}{\partial x} &= -cx+mg
\end{aligned}$$

Gleichung 1:

$$3m\ddot{x}+ml\ddot{\varphi}\cos\varphi-ml\dot{\varphi}^2\sin\varphi+cx-mg=0$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}} &= ml\dot{x}\cos\varphi+ml^2\dot{\varphi}\\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}}\right) &= ml\ddot{x}\cos\varphi-ml\dot{x}\dot{\varphi}\sin\varphi+ml^2\ddot{\varphi}\\
\frac{\partial L}{\partial\varphi} &= -ml\dot{x}\dot{\varphi}\sin\varphi-mgl\sin\varphi
\end{aligned}$$

Gleichung 2:

$$ml\ddot{x}\cos\varphi+ml^2\ddot{\varphi}+mgl\sin\varphi=0$$

Lösung mit Prinzip von d'Alembert:
System mit zwei Freiheitsgraden: x, φ

$$\begin{aligned}
\delta W &= -cx\delta x - m_1 gl\sin\varphi\delta\varphi + m_1 l\dot{\varphi}^2\sin\varphi\delta x + m_3 g\delta x \\
&= \left(-cx + ml\dot{\varphi}^2\sin\varphi + mg\right)\delta x - mgl\sin\varphi\delta\varphi \\
\delta W_T &= \left(-m_1\ddot{x} - m_1 l\ddot{\varphi}\cos\varphi\right)\delta x + \left(-m_1 l\ddot{x}\cos\varphi - m_1 l^2\ddot{\varphi}\right)\delta\varphi - m_2\ddot{x}\delta x - m_3\ddot{x}\delta x \\
&= \left(-3m\ddot{x} - ml\ddot{\varphi}\cos\varphi\right)\delta x + \left(-ml\ddot{x}\cos\varphi - ml^2\ddot{\varphi}\right)\delta\varphi
\end{aligned}$$

$$\delta W + \delta W_T = 0$$

$$\begin{aligned}
&\left(-cx + ml\dot{\varphi}^2\sin\varphi + mg - 3m\ddot{x} - ml\ddot{\varphi}\cos\varphi\right)\delta x \\
&+ \left(-mgl\sin\varphi - ml\ddot{x}\cos\varphi - ml^2\ddot{\varphi}\right)\delta\varphi = 0
\end{aligned}$$

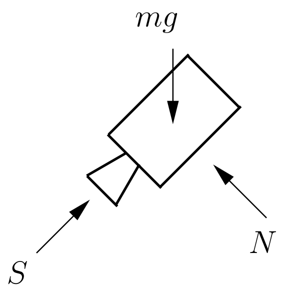
Bewegungsgleichungen

$$3m\ddot{x} + ml\ddot{\varphi}\cos\varphi - ml\dot{\varphi}^2\sin\varphi + cx - mg = 0 \tag{1}$$

$$ml\ddot{x}\cos\varphi + ml^2\ddot{\varphi} + mgl\sin\varphi = 0 \tag{2}$$

Aufgabe 4 [25 Punkte]

zu **a)** FKB:



$$S = \mu_0 w$$

$$m\ddot{x} = S - mg\sin\alpha$$

$$\rightsquigarrow m\ddot{x} - \mu_0 w + \frac{\sqrt{2}}{2} mg = 0$$

zu **b)**

$$m(t) = m_0 - \mu_0 t$$

zu **c)**

$$m\ddot{x} - \mu_0 w + \frac{\sqrt{2}}{2} mg = 0$$

$$\mathrm{d}\dot{x} = \frac{\mu_0 w}{m_0 - \mu_0 t}\mathrm{d}t - \frac{\sqrt{2}}{2} g\,\mathrm{d}t$$

$$\int_{\dot{x}(0)}^{\dot{x}(t)} \mathrm{d}\bar{\dot{x}} = \int_0^t \frac{\mu_0 w}{m_0 - \mu_0 \bar{t}}\mathrm{d}\bar{t} - \int_0^t \frac{\sqrt{2}}{2} g\,\mathrm{d}\bar{t}$$

$$\dot{x}(t) - \dot{x}(0) = -w\ln\left(\frac{m_0 - \mu_0 t}{m_0}\right) - \frac{\sqrt{2}}{2} gt$$

$$\dot{x}(0) = 0$$

$$v(t) = -w\ln\left(\frac{m_0 - \mu_0 t}{m_0}\right) - \frac{\sqrt{2}}{2} gt$$

zu **d)**

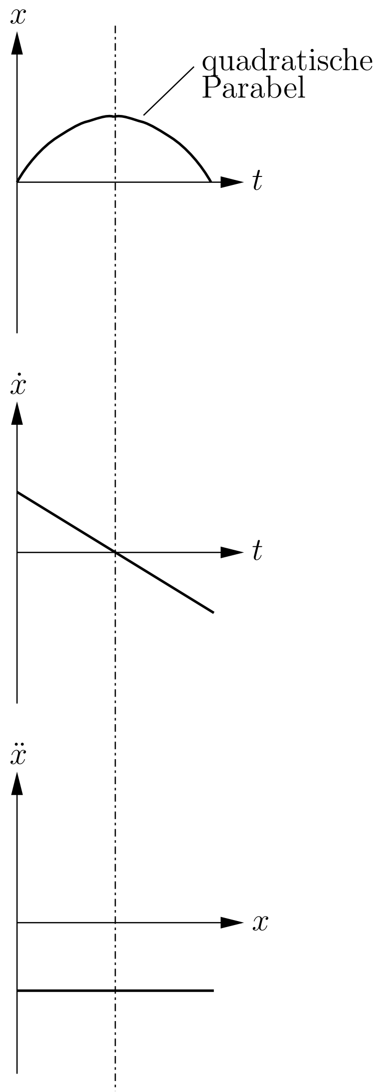
$$
\begin{aligned}
&m(t_1) = \frac{m_0}{2} \\
&m_0 - \mu_0 t_1 = \frac{m_0}{2} \\
&\rightsquigarrow t_1 = \frac{m_0}{2\mu_0} \\
&v(t_1) = -w \ln\left(\frac{m_0 - \mu_0 t_1}{m_0}\right) - \frac{\sqrt{2}}{2} g \frac{m_0}{2\mu_0} \qquad = -w \ln\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} g \frac{m_0}{2\mu_0}
\end{aligned}
$$

zu **e**)

$$
\begin{aligned}
&\ddot{x} = 0 \\
&-w\mu(t) + \frac{\sqrt{2}}{2} mg = 0 \\
&w\dot{m} + \frac{\sqrt{2}}{2} mg = 0 \\
&w\frac{\mathrm{d}m}{m} = -\frac{\sqrt{2}}{2} g \,\mathrm{d}t \\
&w \int_{m(t_1)}^{m(t)} \frac{\mathrm{d}\bar{m}}{\bar{m}} = -\int_{t_1}^{t} \frac{\sqrt{2}}{2} g \,\mathrm{d}\bar{t} \\
&w \ln\left(\frac{m}{m_0/2}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} g (t - t_1) \\
&m(t) = \frac{m_0}{2}\, e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{g}{w}(t - t_1)}
\end{aligned}
$$

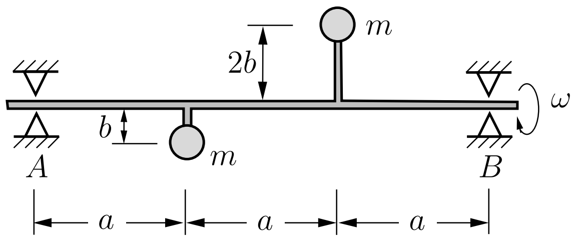
Kurzfrage III-1 [3 Punkte]

Gegeben ist das skizzierte Weg-Zeit-Diagramm. Skizzieren Sie den zugehörigen Geschwindigkeitsverlauf $\dot{x}(t)$ in Abhängigkeit der Zeit sowie den Verlauf der Beschleunigung $\ddot{x}(x)$ in Abhängigkeit des Ortes x.



Kurzfrage III-2 [4 Punkte]

An einer Welle ist in den Abständen b bzw. $2b$ jeweils eine Zusatzmasse m befestigt.
Wie groß ist der Betrag der Lagerkraft A, wenn die Welle mit der Winkelgeschwindigkeit ω rotiert und die Welle sowie die Befestigungsstangen als masselos angesehen werden können?

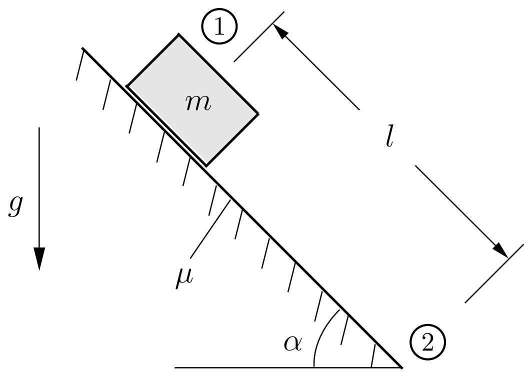


- [ ] $A = b\,\omega^2 m$
- [x] $A = 0$
- [ ] $A = \dfrac{a^2}{2b}\,\omega^2 m$
- [ ] $A = (3a + 2b)\,\omega^2 m$
- [ ] $A = \dfrac{2a-b}{a^2}\,\dfrac{m}{\omega^2}$

Kurzfrage III-3 [3 Punkte]

Auf einer rauhen Bahn (Reibungskoeffizient μ) rutscht eine Masse m die Strecke l herunter. Die Anfangsgeschwindigkeit sei $v_1 = 0$.

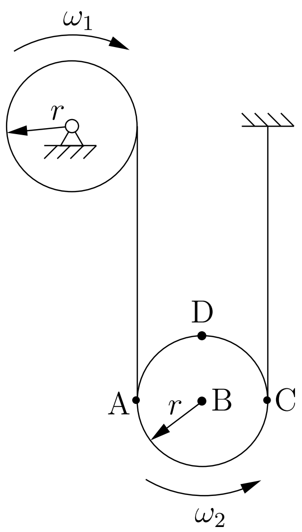
Welche der folgenden Aussagen für die Endgeschwindigkeit in Punkt (2) ist richtig?



- [ ] $v_2 = \sqrt{mgl}\,\sqrt{\sin\alpha - \mu\cos\alpha}$
- [x] $v_2 = \sqrt{2gl}\,\sqrt{\sin\alpha - \mu\cos\alpha}$
- [ ] $v_2 = \sqrt{2gl}\,\sqrt{\cos\alpha - \mu\sin\alpha}$
- [ ] $v_2 = \sqrt{mgl}\,(\cos\alpha + \mu\sin\alpha)$
- [ ] $v_2 = \sqrt{2gl\mu}\,\sqrt{\sin^2\alpha - \cos^2\alpha}$

Kurzfrage III-4 [5 Punkte]

Kreuzen Sie an!



	richtig	falsch
$v_D = \frac{\sqrt{2}}{2} v_A$	X	
$v_C = 0$	X	
$\omega_1 = \omega_2$		X
$\omega_1 = 2\omega_2$	X	
$\omega_2 = \frac{2v_B}{r}$		X