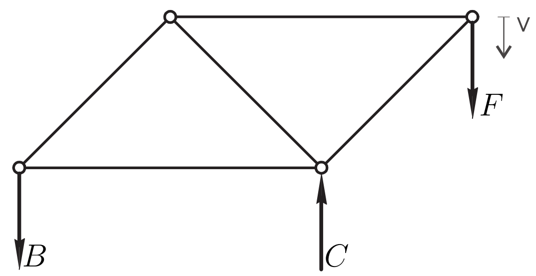
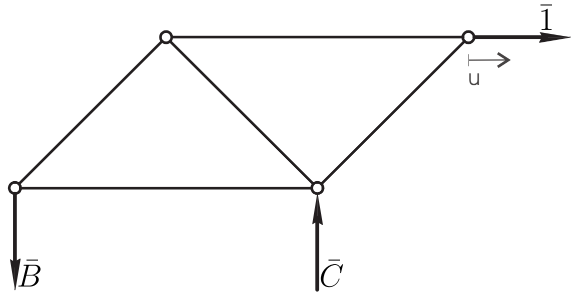
Aufgabe 1 - Lösung

a) Arbeitssatz:

"Nullsystem":



"1-System":



$$v = \frac{1}{F}\sum_i \frac{S_i^2 l_i}{EA_i} \qquad u = \sum_i \frac{S_i \bar{S}_i l_i}{EA_i}$$

mit $EA_i = EA =$const.

i	S_i	$\bar{S}_i$	l_i	$S_i^2 l_i$	$S_i \bar{S}_i l_i$
1	$\frac{\sqrt{2}}{2}F$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}a$	$\frac{\sqrt{2}}{4}F^2 a$	$\frac{\sqrt{2}}{4}Fa$
2	$-\frac{1}{2}F$	$-\frac{1}{2}$	a	$\frac{1}{4}F^2 a$	$\frac{1}{4}Fa$
3	$-\frac{\sqrt{2}}{2}F$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}a$	$\frac{\sqrt{2}}{4}F^2 a$	$\frac{\sqrt{2}}{4}Fa$
4	F	1	a	$F^2 a$	Fa
5	$-\sqrt{2}F$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}a$	$\sqrt{2}F^2 a$	0
			$\sum$	$\frac{1}{4}\left(6\sqrt{2}+5\right)F^2 a$	$\frac{1}{4}\left(2\sqrt{2}+5\right)Fa$

Damit ergibt sich

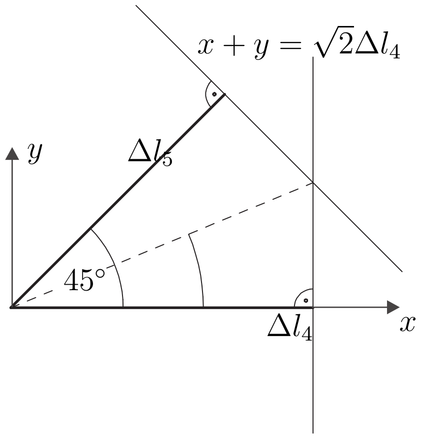
$$u = \frac{1}{4}\frac{Fa}{EA}\left(2\sqrt{2}+5\right)$$

$$v = \frac{1}{4}\frac{Fa}{EA}\left(6\sqrt{2}+5\right)$$

b) Verschiebungsplan:

$$\Delta l_i = l_i \alpha_T \Delta T_i$$

$$\Delta l_4 = \Delta l_5 = a\,\alpha_T \Delta T$$



$$u = \Delta l_4 = a\,\alpha_T \Delta T$$

$$x + y = \sqrt{2}\Delta l_4$$

$$x = \Delta l_4 \quad \longrightarrow \quad v = y = (\sqrt{2} - 1)\Delta l_4$$

Lösung: Aufgabe 2

a)

$$l_1 = 100\, r \qquad\qquad I_{p1} = \frac{\pi}{2}(R^4 - r^4) = \frac{15}{2}\pi\, r^4$$

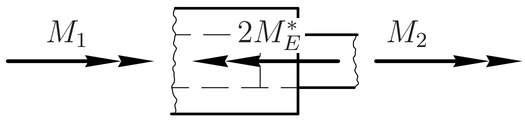
$$\vartheta_{a1}(x = l_1) = \alpha = \frac{M_E^*\, 100\, r}{G\, \dfrac{15}{2}\pi\, r^4}$$

$$\longrightarrow \qquad M_E^* = \frac{3}{40}\pi\, G\, \alpha\, r^3$$

b)

$$\vartheta_{b1} = \vartheta_{b2} + \alpha \qquad\qquad I_{p2} = \frac{1}{2}\pi\, r^4$$

$$\vartheta_{b1} = \frac{M_1\, l_1}{G\, I_{p1}} \qquad\qquad \vartheta_{b2} = \frac{M_2\, l_2}{G\, I_{p2}}$$



$$M_1 + M_2 = 2M_E^*$$

$\Longrightarrow$ 4 Gleichungen und 4 Unbekannte: $\vartheta_{b1}, \vartheta_{b2}, M_1, M_2$

$$M_2 = \frac{3}{160}\pi\, G\, \alpha\, r^3$$

$$M_1 = \frac{21}{160}\pi\, G\, \alpha\, r^3$$

$$\Longrightarrow \qquad \vartheta_{b1} = \frac{7}{4}\alpha$$

c)

Hohlwelle

$$\tau_{max1} = \frac{M_1}{W_{T1}} \qquad\qquad M_1 = \frac{21}{160}\pi\, G\, \alpha\, r^3$$

$$W_{T1} = \frac{\pi}{2}\frac{R^4 - r^4}{R} = \frac{15\pi}{4}r^3$$

$$\Longrightarrow \quad \tau_{max1} = \frac{7}{200}G\,\alpha$$

Vollwelle

$$\tau_{max2} = \frac{M_2}{W_{T2}} \qquad\qquad M_2 = \frac{3}{160}\pi\, G\, \alpha\, r^3$$

$$W_{T2} = \frac{\pi}{2}r^3$$

$$\Longrightarrow \quad \tau_{max2} = \frac{15}{400}G\,\alpha$$

Aufgabe 3 - Lösung

a)

Lösung durch Integration der Dgl der Biegelinie.

mit $\xi = x/l$ und der Ableitung $(\ )^I = \dfrac{d}{dx}$

$$
\begin{aligned}
EIw^{IV} &= q_0\xi^3\\
EIw^{III} &= -Q = \frac{1}{4}q_0 l\xi^4 + C_1\\
EIw^{II} &= -M = \frac{1}{20}q_0 l^2\xi^5 + C_1 l\xi + C_2\\
EIw^{I} &= \frac{1}{120}q_0 l^3\xi^6 + \frac{1}{2}C_1 l^2\xi^2 + C_2 l\xi + C_3\\
EIw &= \frac{1}{840}q_0 l^4\xi^7 + \frac{1}{6}C_1 l^3\xi^3 + \frac{1}{2}C_2 l^2\xi^2 + C_3 l\xi + C_4
\end{aligned}
$$

Randbedingungen:

$$
\begin{aligned}
&EIw(\xi = 0) = 0 \quad \Longrightarrow \quad C_4 = 0\\
&EIw^{II}(\xi = 0) = 0 \quad \Longrightarrow \quad C_2 = 0\\
&EIw^{I}(\xi = 1) = 0 : \quad \frac{1}{120}q_0 l^3 + \frac{1}{2}C_1 l^2 + C_3 = 0\\
&EIw(\xi = 1) = 0 : \quad \frac{1}{840}q_0 l^4 + \frac{1}{6}C_1 l^3 + C_3 l = 0\\
&\Longrightarrow \quad C_1 = -\frac{3}{140}q_0 l \quad ; \quad C_3 = \frac{1}{420}q_0 l^3
\end{aligned}
$$

Biegelinie:

$$EIw(\xi) = \frac{q_0 l^4}{840}(\xi^7 - 3\xi^3 + 2\xi)$$

Absenkung an der Stelle $x = l/2$:

$$w(\xi = 1/2) = \frac{q_0 l^4}{840EI}\left\{\frac{1}{128} - \frac{3}{8} + 1\right\} = \frac{27q_0 l^4}{35840EI}$$

b)
lokales Maximum von M bei $Q(\xi) = 0$:

$$Q(\xi) = -\frac{1}{4} q_0 l \xi^4 + \frac{3}{140} q_0 l = 0$$

$$\Longrightarrow \quad \xi^4 = \frac{3}{35} \quad \Longrightarrow \quad x_M = \sqrt[4]{\frac{3}{35}} l$$

Biegemomentenverlauf:

$$M(x) = -\frac{1}{20EI} q_0 l^2 \left(\frac{x}{l}\right)^5 + \frac{3}{140EI} q_0 l^2 \frac{x}{l}$$

Biegemoment an der Stelle $(x = x_M)$:

$$M(x = x_M) = 9,3 \cdot 10^{-3} \frac{q_0 l^2}{EI}$$

Biegemoment an der Einspannung:

$$M(x = l) = -2,86 \cdot 10^{-2} \frac{q_0 l^2}{EI}$$

Das Biegemoment wird bei $x = l$ betragsmäßig maximal.

Lösung - Aufgabe 4

a) Dehnungen ε_x, ε_y / Gleitung γ_{xy}

Aus den vorgegebenen Längen und Winkeländerungen ergibt sich:

$$\varepsilon_x = \frac{a - a_0}{a_0} \tag{1}$$

$$\varepsilon_y = \frac{b - b_0}{b_0} \tag{2}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{e}{b_0} \tag{3}$$

b) Bestimmen der Materialkonstanten E, G und ν

HOOKEsches Gesetz:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}\left[\sigma_x - \nu\sigma_y\right] \tag{4}$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}\left[\sigma_y - \nu\sigma_x\right] \tag{5}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{1}{G}\,\tau_{xy} \tag{6}$$

Einsetzen liefert:

$$\frac{a - a_0}{a_0} = \frac{1}{E}\left[0 - \nu\sigma_y\right] \tag{7}$$

$$\frac{b - b_0}{b_0} = \frac{1}{E}\left[\sigma_y - 0\right] \tag{8}$$

$$\frac{e}{b_0} = \frac{1}{G}\,\tau_{xy} \tag{9}$$

Aus (9):

$$G = \frac{\tau_{xy}\, b_0}{e} \tag{10}$$

Aus (8):

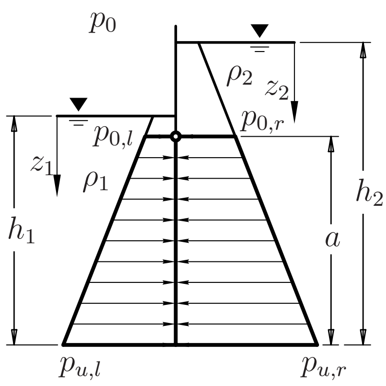
$$E = \frac{\sigma_y\, b_0}{b - b_0} \tag{11}$$

Eingesetzt in (7):

$$\nu = -\frac{(a - a_0)\, b_0}{(b - b_0)\, a_0} \tag{12}$$

Lösung - Hydrostatik

a) Druckverlauf



$$p_{u,l} = p_0 + \rho_1 g h_1$$

$$p_{u,r} = p_0 + \rho_2 g h_2$$

b) Resultierende Druckkraft

$$F_1 = p(z_{1,S})\,A, \qquad F_2 = p(z_{2,S})\,A$$

$$z_{1,S} = h_1 - \frac{2}{3}\,a, \qquad z_{2,S} = h_2 - \frac{2}{3}\,a$$

$$A = \frac{1}{2}\,a^2$$

$$\Rightarrow F_1 = \left[p_0 + \rho_1 g\left(h_1 - \frac{2}{3}\,a\right)\right]\frac{1}{2}\,a^2 = \left(p_0 + \rho_1 g\,\frac{1}{3}\,a\right)\frac{1}{2}\,a^2$$

$$\Rightarrow F_2 = \left(p_0 + \rho_2 g\,\frac{2}{3}\,a\right)\frac{1}{2}\,a^2$$

c) Öffnen der Klappe

Druckmittelpunkte

$$z_{1,D} = \frac{I_{x,1}}{S_{x,1}} = \frac{\frac{a^4}{36} + \left(h_1 - \frac{2}{3}\,a\right)^2 A}{\left(h_1 - \frac{2}{3}\,a\right) A} = \frac{1}{2}\,a$$

$$z_{2,D} = \frac{I_{x,2}}{S_{x,2}} = \frac{\frac{a^4}{36} + \left(h_2 - \frac{2}{3}\,a\right)^2 A}{\left(h_2 - \frac{2}{3}\,a\right) A} = \frac{3}{4}\,a$$

Momentengleichgewicht um Achse A-A nicht erfüllt, wenn Klappe geöffnet:

$$F_1\;\left(z_{1,D} - (h_1 - a)\right) > F_2\;\left(z_{2,D} - (h_2 - a)\right)$$

$$\Rightarrow \frac{\rho_1}{\rho_2} > \frac{5}{2}$$