| INSTITUT FÜR MECHANIK | Technische Universität Darmstadt |
|---|---|
| Prof. D. Gross<br>Prof. P. Hagedorn<br>Prof. W. Hauger<br>Prof. R. Markert | **Diplomvorprüfung**<br>**Technische Mechanik II**<br>am 03. März 2003 |

(Name) (Vorname) (Matr.-Nr.) (Studiengang)

Die Aufgaben sind nicht nach ihrem Schwierigkeitsgrad geordnet. Bitte beginnen Sie für jede Aufgabe ein neues Blatt und nummerieren Sie die Blätter. Der Lösungsweg soll klar erkennbar sein, die Ergebnisse müssen deutlich hervorgehoben werden.

Es ist erlaubt, eine handgeschriebene Formelsammlung im Umfang eines beidseitig beschriebenen DIN A4-Blattes sowie die drei Hilfsblätter zur TM II (Biegelinientafel, Hilfstafel zur Integration und Hilfsblatt zur Torsion) zu benutzen. Andere Hilfsmittel sind nicht erlaubt. Es wird ausdrücklich darauf hingewiesen, daß keinerlei elektronische Hilfsmittel benutzt werden dürfen. Hierzu zählen insbesondere Taschenrechner, Laptops und Handys.

**Achtung:**
Klausurteilnehmer der Fachrichtung WI/BI bearbeiten bitte Aufgabe 4a anstatt Aufgabe 4!

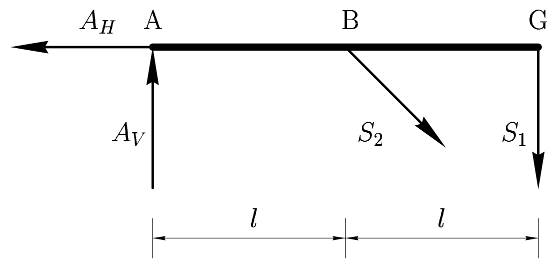
Viel Erfolg !

| Aufgabe | 1 | 2 | 3 | 4 | K1 | K2 | K3 | K4 | K5 | $\sum$ Klausur | Bonus-punkte | $\sum$ gesamt | Note |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| max. Punkte | 17 | 24 | 27 | 16 | 3 | 1 | 4 | 6 | 2 | | | | |
| Vor-korr. | | | | | | | | | | | | | |
| Nach-korr. | | | | | | | | | | | | | |

# Lösung zu Aufgabe 1 (Elastizität, Stabwerk) [ 17 Punkte ]

a) Stabkraft $S_1$

Freikörperbild:




Gleichgewicht:

$$\circlearrowleft \Sigma M_A = S_2 \frac{1}{\sqrt{2}} l + S_1 2l = 0$$

mit $S_2 = \sigma_{zul} A_2$

$$\Rightarrow S_1 = -\frac{1}{2\sqrt{2}} S_2 = -\frac{1}{2\sqrt{2}} \sigma_{zul} A \quad (1)$$

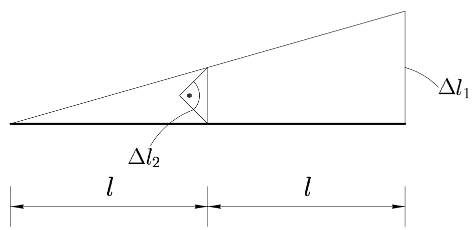
b) Bestimmung von $\Delta T$

E-Gesetz, Längenänderung:

$$\Delta l_1 = \frac{S_1 l_1}{EA_1} + \alpha_T \Delta T l_1 = \frac{S_1 l}{\sqrt{2} EA} + \alpha_T \Delta T l \quad (2)$$

$$\Delta l_2 = \frac{S_2 l_2}{EA_2} = \frac{S_2 \sqrt{2} l}{EA} \quad (3)$$

Verschiebungsplan:



Kinematik:

$$\Delta l_2 = \frac{1}{2}\Delta l_1 \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\Delta l_1 \qquad (4)$$

Bestimmen von $\Delta T$:

(2) und (3) eingesetzt in (4):

$$\begin{aligned}
\frac{S_2\sqrt{2}l}{EA} &= \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\frac{S_1\, l}{\sqrt{2}\, EA} + \alpha_T\, \Delta T\, l\right)\\
\frac{S_2\sqrt{2}l}{EA} &= -\frac{S_2\, l}{8\sqrt{2}\, EA} + \frac{1}{2\sqrt{2}}\alpha_T\, \Delta T\, l\\
\Rightarrow \Delta T &= \frac{17\, S_2}{4\, \alpha_T\, EA} = \frac{17\, \sigma_{zul}}{4\, \alpha_T\, E}
\end{aligned}$$

c) Verschiebung des Gelenks G:

$$\begin{aligned}
u_G &= \Delta l_1 = \frac{S_1\, l}{\sqrt{2}\, EA} + \alpha_T\, \Delta T\, l\\
&= -\frac{\sigma_{zul}\, A\, l}{4\, EA} + \alpha_T\left(\frac{17\, \sigma_{zul}}{4\, \alpha_T\, E}\right) l = 4\,\frac{\sigma_{zul}\, l}{E}
\end{aligned}$$

# Lösung zu Aufgabe 2 (ESZ) [ 24 Punkte ]

**a)** Ebener Spannungszustand: $\sigma_z = 0$

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}\big(\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)\big) + \alpha_T \Delta T$$

**1.** $\sigma_x = 0, \quad \sigma_y = \sigma_0, \quad \Delta T = 0$

$$\varepsilon_x = \frac{\Delta d}{d} = -\frac{\delta}{d} \quad \Rightarrow \quad \frac{\delta}{d} = \frac{\nu}{E}\sigma_0 \quad \Longrightarrow \quad \sigma_0 = \frac{E\delta}{\nu d}$$

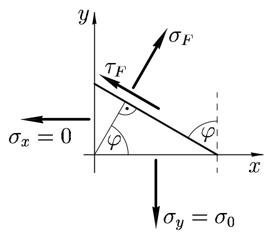
**2.** $\sigma_x = 0, \quad \sigma_y = 0$

$$-\frac{\delta}{d} = \alpha_T \Delta T \quad \Longrightarrow \quad \Delta T = -\frac{\delta}{\alpha_T d}$$

**b)** Transformationsbeziehungen:

$$\sigma_F = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) + \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y)\cos 2\varphi + \tau_{xy}\sin 2\varphi$$

$$\tau_F = -\frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y)\sin 2\varphi + \tau_{xy}\cos 2\varphi$$




Mit $\sigma_x = 0$, $\sigma_y = \sigma_0$ sowie $\tau_{xy} = 0$ ergeben sich

$$\sigma_F = \frac{1}{2}\sigma_0(1 - \cos 2\varphi), \qquad \tau_F = \frac{1}{2}\sigma_0 \sin 2\varphi$$

**c)** $\sigma_y = 0, \quad \sigma_z = 0, \quad \Delta T = 0$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}\big(\sigma_y - \nu(\sigma_z + \sigma_x)\big) + \alpha_T\Delta T, \qquad \varepsilon_z = \frac{1}{E}\big(\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)\big) + \alpha_T\Delta T$$

$$\varepsilon_x = -\frac{\delta}{d} = \frac{1}{E}\sigma_x \quad \Rightarrow \quad \sigma_x = -E\,\frac{\delta}{d}$$

$$\varepsilon_y = \varepsilon_z = -\frac{1}{E}\,\nu\,\sigma_x = \nu\,\frac{\delta}{d} \qquad \tau_{xy} = 0 \quad \Rightarrow \quad \gamma_{xy} = 0$$

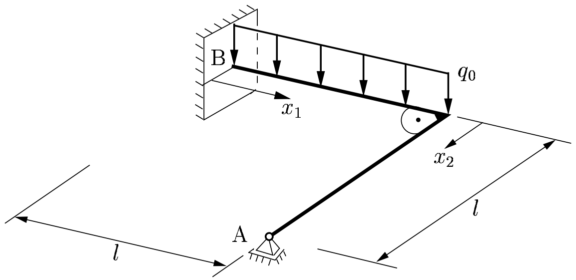
**d)** Höhen- und Dickenänderung:

$$\varepsilon_y = \frac{\Delta h}{h} \quad \text{und} \quad \varepsilon_z = \frac{\Delta t}{t} \quad \Rightarrow \quad \Delta h = \varepsilon_y h = \nu\frac{\delta}{d}h \quad \text{und} \quad \Delta t = \varepsilon_z t = \nu\frac{\delta}{d}t$$

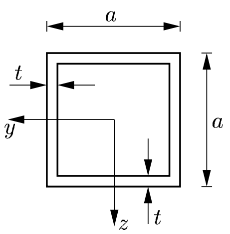
Volumenänderung:

$$\Delta V = (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z)\, V_0, \quad \Delta V = \left(-\frac{\delta}{d} + \nu\,\frac{\delta}{d} + \nu\,\frac{\delta}{d}\right) dht = -\big(1 - 2\nu\big)\,\delta h t$$

# Lösung zu Aufgabe 3 (Balkenbiegung) [ 27 Punkte ]




Querschnitt ($t \ll a$):




Ein ebener rechtwinkliger Rahmen ist in B eingespannt und in A gelenkig gelagert (Loslager). Der Rahmen hat einen quadratischen dünnwandigen Querschnitt und wird durch die konstante Streckenlast $q_0$ belastet.

a) Bestimmen Sie für den Querschnitt das Flächenträgheitsmoment $I_y$ und das Torsionsträgheitsmoment $I_T$.

b) Bestimmen SIe die Auflagerkraft im Punkt A.

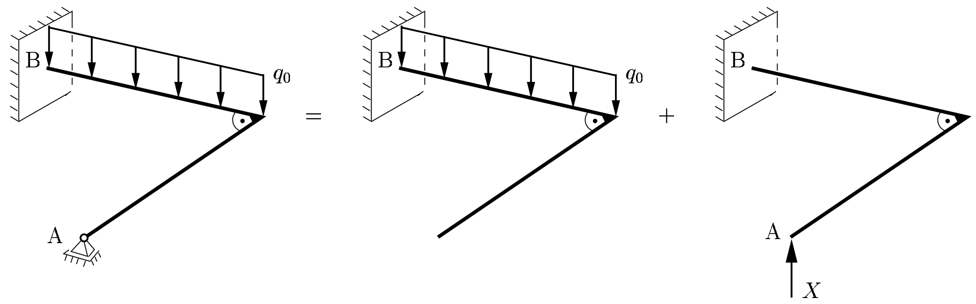
Gegeben:
$l\,,\ a\,,\ t \ll a\,,\ q_0\,,\ E\,,\ G = \frac{1}{2}E\ ,$ Querkraftverformung ist vernachlässigbar

a) Trägheitsmomente

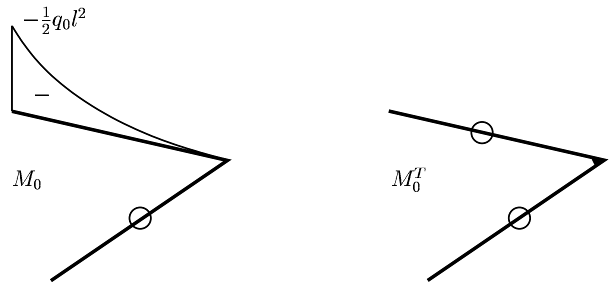
$$\begin{aligned} I_y &= I^* + z^2 A \\ &= \underbrace{2\frac{at^3}{12}}_{\approx 0} + 2\frac{ta^3}{12} + 2\left(\frac{a}{2}\right)^2 at \\ &= \frac{2}{3}a^3 t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_T &= \frac{(2A)^2}{U}t \\ &= \frac{(2a^2)^2}{4a}t \\ &= a^3 t \end{aligned}$$

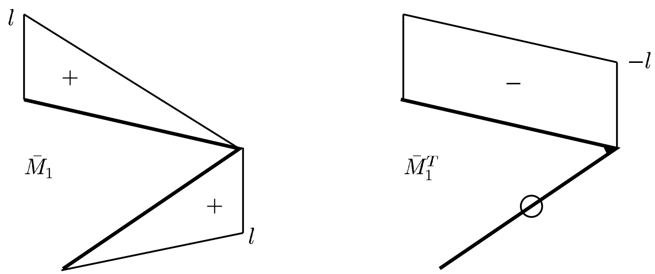
b) Auflagerkraft, Lösung mit Arbeitssatz:




0-System:




1-System:



Kompatibilität:

$$\begin{aligned} v_A = v_A^0 + v_A^1 &= 0 \\ \alpha_{10} + X\alpha_{11} &= 0 \\ \rightarrow \quad X &= -\frac{\alpha_{10}}{\alpha_{11}} \end{aligned}$$

mit:

$$\begin{aligned} \alpha_{10} &= \int \frac{\bar{M}_1 M_0}{EI}\,dx + \int \frac{\bar{M}_1^T M_0^T}{GI_T}\,dx \\ \alpha_{11} &= \int \frac{\bar{M}_1^2}{EI}\,dx + \int \frac{\bar{M}_1^{T\,2}}{GI_T}\,dx \end{aligned}$$

Koppeltafel:

$$\begin{aligned} \alpha_{10} &= \frac{1}{EI}\left(-\frac{1}{4}l\frac{q_0 l^2}{2}l\right) \\ &= -\frac{3}{16}\frac{q_0 l^4}{Ea^3 t} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \alpha_{11} &= \frac{1}{EI}\left(\frac{1}{3}l^3 + \frac{1}{3}l^3\right) + \frac{1}{GI_T}l^3 \\ &= \frac{l^3}{Ea^3 t} + \frac{2l^3}{Ea^3 t} \\ &= \frac{3l^3}{Ea^3 t} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X &= -\frac{\alpha_{10}}{\alpha_{11}} \\ &= \frac{1}{16} q_0 l \end{aligned}$$

# Lösung zu Aufgabe 4 (nicht WI/BI) (Torsion) [ 16 Punkte ]

a) Berechnung des Momentenverlaufs: (5 Punkte)

$$\frac{dM_T(x)}{dx} = -m_1 \qquad \Rightarrow \qquad M_T(x) = -m_1\,x + C_1$$

Aus der Randbedingung $M_T(l) = M_1$ ergibt sich:

$$\boxed{M_T(x) = m_1\,(l-x) + M_1}$$

b) Berechnung der Wanddicke: (5 Punkte)

$$\tau = \frac{M_T(x)}{W_T(x)} = \tau_0$$

mit $W_T(x) = 2\pi r^2\,t(x)$ ergibt sich:

$$\tau_0 = \frac{M_1 + m_1\,(l-x)}{2\pi r^2\,t(x)}$$

Dies kann umgeformt werden zu:

$$\boxed{t(x) = \frac{M_1 + m_1\,(l-x)}{2\pi r^2\,\tau_0}}$$

Das Torsionsträgheitsmoment lautet dann:

$$I_T(x) \;=\; 2\pi r^3\,t(x) \;=\; r\,\frac{M_1 + m_1\,(l-x)}{\tau_0}$$

c) Berechnung der Verdrehung: (6 Punkte)

$$GI_T(x)\frac{d\vartheta(x)}{dx} = M_T(x)$$

mit $I_T(x) = r\,\frac{M_1+m_1\,(l-x)}{\tau_0}$ ergibt sich:

$$\frac{d\vartheta(x)}{dx} = \frac{M_T(x)}{GI_T(x)} = \frac{[M_1 + m_1\,(l-x)]\,\tau_0}{G\,r\,[M_1 + m_1\,(l-x)]} = \frac{\tau_0}{G\,r}$$

damit ist

$$\vartheta(x) = \int \frac{\tau_0}{G\,r}\,dx = \frac{\tau_0\,x}{G\,r} + C_2$$

Mit der Randbedingung $\vartheta(0) = 0$ folgt

$$\boxed{\vartheta(x) = \frac{\tau_0\,x}{G\,r}}$$

# Lösung zu Aufgabe 4a (nur WI/BI) (Hydrostatik) [16 Punkte]

a)

**Kraft in $z$-Richtung:**

Volumen des Schiebers unter dem Wasserspiegel:

$$V_s = (h-a)bL + \frac{1}{2}abL$$

Auftriebskraft:

$$F_A = \rho g V_s = F_z = \rho g b L\left(h - \frac{a}{2}\right)$$

**Kraft in $x$-Richtung:**

Druck im Schwerpunkt der auf die $yz$-Ebene projizierten Fläche des Schiebers:

$$p_s = \rho g \frac{h}{2}$$

Auf die $yz$-Ebene projizierte Fläche des Schiebers:

$$A_s = hL$$

Kraft auf den Schieber:

$$F_x = p_s A_s = \frac{1}{2}\rho g L h^2$$

b)

Kräftegleichgewicht am Schieber in $z$-Richtung im Moment des Anhebens:

$$0 = F_z - G$$

Nach $h$ aufgelöst:

$$h_0 = \frac{a}{2} + \frac{G}{\rho g b L}$$

c)

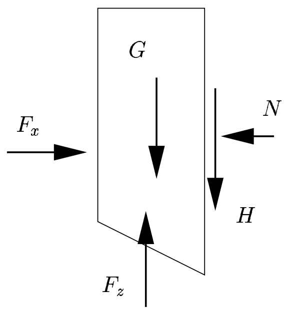
Kräftegleichgewicht am Schieber in $z$-Richtung im Moment des Anhebens

(Grenzfall $H = \mu_0 F_x$):

$$\begin{aligned} 0 &= F_z - G - H \\ H &= \mu_0 F_x \end{aligned}$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$h^2 - \frac{2b}{\mu_0}h + \frac{ab}{\mu_0} + \frac{2G}{\mu_0 \rho g L} = 0$$



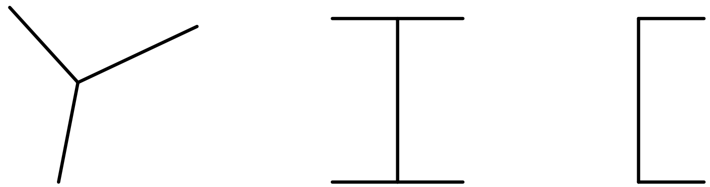

Quadratische Gleichung für $h$:

$$\begin{aligned} h_{1,2} &= \frac{b}{\mu_0} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{\mu_0}\right)^2 - \frac{ab}{\mu_0} - \frac{2G}{\mu_0 \rho g L}} \\ h_H &= \frac{b}{\mu_0} - \sqrt{\left(\frac{b}{\mu_0}\right)^2 - \frac{ab}{\mu_0} - \frac{2G}{\mu_0 \rho g L}} = \frac{b}{\mu_0}\left(1 - \sqrt{1 - \frac{2\mu_0}{b}h_0}\right) \end{aligned}$$

# Aufgabe K1 [3 Punkte]

Bearbeiten Sie diese Aufgabe bitte auf diesem Blatt!

Markieren Sie bei den dargestellten Querschnitten jeweils qualitativ den Schubmittelpunkt.



# Aufgabe K2 [1 Punkt]

Bearbeiten Sie diese Aufgabe bitte auf diesem Blatt!

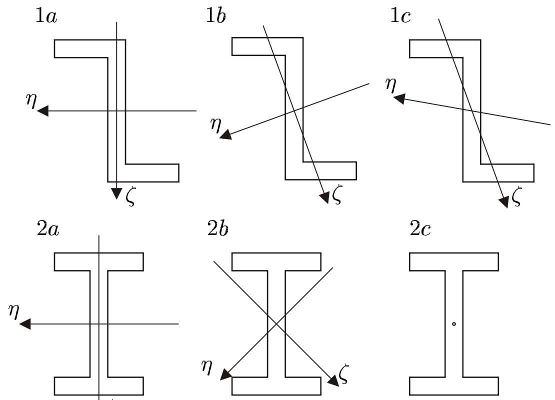
In Hauptachsen lässt sich

- [x] jeder beliebige Spannungszustand darstellen,
- [ ] nur der hydrostatische Spannungszustand darstellen,
- [ ] kein Spannungszustand darstellen, der durch Temperaturänderungen hervorgerufen wird.

# Aufgabe K3 [ 4 Punkte ]

Bearbeiten Sie diese Aufgabe bitte auf diesem Blatt!

Welche der angegebenen Richtungen sind qualitativ Hauptrichtungen der Flächenträgheitsmomente der skizzierten Profilquerschnitte? Kreuzen Sie die richtigen Lösungen an.



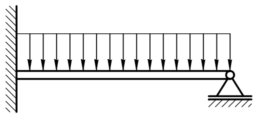

alle Richtungen

| Bild | richtig | falsch |
|---|---|---|
| 1a) | | x |
| 1b) | x | |
| 1c) | | x |
| 2a) | x | |
| 2b) | | x |
| 2c) | | x |

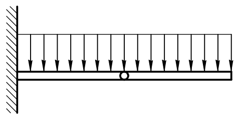
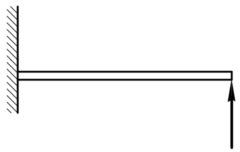
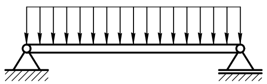
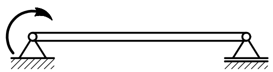
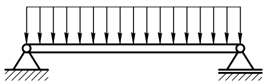
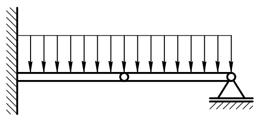
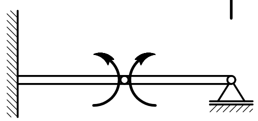
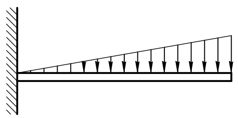
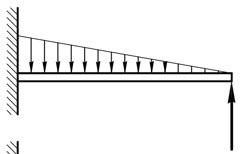
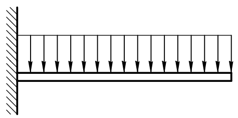
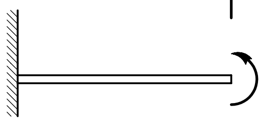
## Aufgabe K4 [6 Punkte]

Bearbeiten Sie diese Aufgabe bitte auf diesem Blatt!

Gegeben ist der folgende statisch unbestimmt gelagerte Balken:



Geben Sie an, welche der folgenden Zerlegungen in '0'- und '1'-System zulässig sind.

| '0'-System | '1'-System | richtig | falsch |
|---|---|---|---|
|  |  | ☐ | ☐ |
|  |  | ☐ | ☐ |
|  |  | ☐ | ☐ |
|  |  | ☐ | ☐ |
|  |  | ☐ | ☐ |
|  |  | ☐ | ☐ |

## Aufgabe K5 [2 Punkte]

Bearbeiten Sie diese Aufgabe bitte auf diesem Blatt!

In einer senkrecht zu ihrer Ebene belasteten Scheibe (Platte) tritt

- ☐ ein ebener Verzerrungszustand
- ☐ ein ebener Spannungszustand
- ☐ beide
- ☒ keiner der beiden

auf.

In einer in ihrer Ebene belasteten Scheibe tritt

- ☐ ein ebener Verzerrungszustand
- ☒ ein ebener Spannungszustand
- ☐ beide
- ☐ keiner der beiden

auf.