INSTITUT FÜR MECHANIK	Technische Universität Darmstadt
Prof. W. Becker Prof. D. Gross Prof. P. Hagedorn Jun. Prof. R. Müller	**Prüfung** **Technische Mechanik II**
	am 25. Juli 2005

(Name) (Vorname) (Matr.-Nr.) (Studiengang)

(Platznummer)

Einverständniserklärung:
Ich stimme hiermit zu, dass meine Prüfungsergebnisse zusammen mit meiner Matrikelnummer (ohne Namen) im Internet eingesehen werden können.

Darmstadt, 25.07.2005

(Unterschrift)

Die Aufgaben sind nicht nach ihrem Schwierigkeitsgrad geordnet. Bitte beginnen Sie für jede Aufgabe ein neues Blatt und numerieren Sie die Blätter. Der Lösungsweg soll klar erkennbar sein, die Ergebnisse müssen deutlich hervorgehoben werden. Bei den durch K gekennzeichneten Kurzfragen sind lediglich Ergebnisse einzutragen.

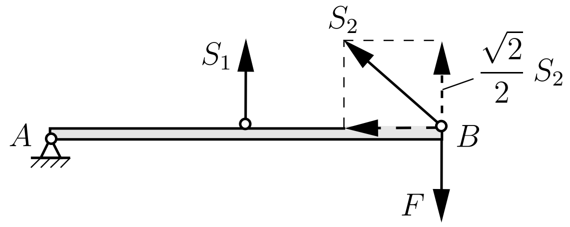
Es ist erlaubt, eine handgeschriebene Formelsammlung im Umfang eines beidseitig beschriebenen DIN A4-Blattes, die Biegelinientafel, die Integrationstafel sowie das Hilfsblatt zur Torsion zu benutzen. Andere Hilfsmittel sind nicht erlaubt. Es wird ausdrücklich darauf hingewiesen, dass keinerlei elektronische Hilfsmittel benutzt werden dürfen. Hierzu zählen insbesondere Taschenrechner, Laptops und Handys.

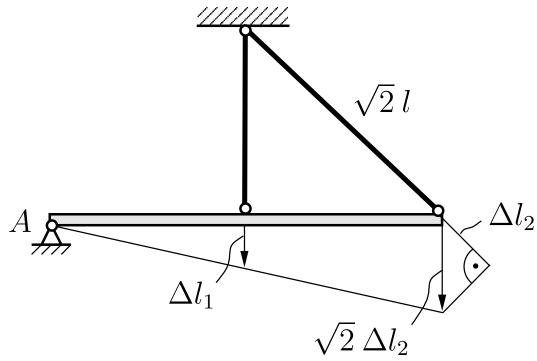
Achtung:
Aufgabe 4a ist für die Studiengänge WI-BI, BI, Mathematik und Geowissenschaften.
Aufgabe 4b ist für die Studiengänge MB, WIMB, MPE, CMPE, CE und Mechanik.

Viel Erfolg !

Aufgabe	1	2	3	4	K1	K2	K3	K4	$\sum$	Note
max. Punkte	19	20	25	21	2	5	4	4	100	
erreichte Punkte										
Hand-zeichen										

Aufgabe 1 [19 Punkte]





Gleichgewicht: $\overset{\curvearrowleft}{A}$: $l\,S_1 + 2l\,\frac{\sqrt{2}}{2}\,S_2 - 2l\,F = 0$

$$\rightarrow \quad S_1 + \sqrt{2}\,S_2 = 2F \qquad (1)$$

Elastizitätsgesetz: $\Delta l_1 = \frac{S_1 l}{EA} + \alpha_T\,\Delta T\,l\,, \qquad \Delta l_2 = \frac{S_2\sqrt{2}\,l}{EA}$ (2)

Kinematik: $2\Delta l_1 = \sqrt{2}\,\Delta l_2$ (3)

zu a) Schrittweise Einsetzen von (2), (1) in (3)

$$2\,\frac{S_1 l}{EA} + 2\,\alpha_T\,\Delta T\,l = 2\,\frac{S_2 l}{EA} \quad \rightarrow \quad -S_1 + S_2 = EA\,\alpha_T\,\Delta T$$

$$\rightarrow \quad \left(\sqrt{2}+1\right) S_2 = 2F + EA\,\alpha_T\,\Delta T \quad \rightarrow \quad \underline{\underline{S_2 = \frac{1}{1+\sqrt{2}}\left[2F + EA\,\alpha_T\,\Delta T\right]}}$$

zu b) $S_2 = 0 \quad \rightarrow \quad \underline{\underline{\Delta T = -\,\frac{2F}{EA\,\alpha_T}}}$

Aufgabe 2 [20 Punkte]

a)
$$
\begin{aligned}
EIw^{\mathrm{IV}}(x) &= q_0 \frac{x}{l} \\
EIw'''(x) &= \frac{1}{2} q_0 \frac{x^2}{l} + C_1 \ = -Q \\
EIw''(x) &= \frac{1}{6} q_0 \frac{x^3}{l} + C_1 x + C_2 \ = -M \\
EIw'(x) &= \frac{1}{24} q_0 \frac{x^4}{l} + \frac{1}{2} C_1 x^2 + C_2 x + C_3 \\
EIw(x) &= \frac{1}{120} q_0 \frac{x^5}{l} + \frac{1}{6} C_1 x^3 + \frac{1}{2} C_2 x^2 + C_3 x + C_4
\end{aligned}
$$

Randbedingungen:

$$w'(0) = 0 \qquad (4) \qquad\qquad w(l) = 0 \qquad (6)$$

$$Q(0) = F_c = w(0) \cdot c \qquad (5) \qquad\qquad M(l) = 0 \qquad (7)$$

$$
\begin{aligned}
&(4) \Rightarrow \quad C_3 = 0 \\
&(5) \Rightarrow \quad -C_1 = \frac{C_4}{EI} \cdot c \quad \Rightarrow \quad C_4 = -\underbrace{\frac{EI}{c}}_{\frac{l^3}{6}} C_1 \\
&(6) \Rightarrow \quad \frac{1}{120} q_0 l^4 + \frac{1}{6} C_1 l^3 + \frac{1}{2} C_2 l^2 + C_4 = 0 \\
&(7) \Rightarrow \quad \frac{1}{6} q_0 l^2 + C_1 l + C_2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad C_2 = -\frac{1}{6} q_0 l^2 - C_1 l \qquad (8)
\end{aligned}
$$

(5) und (8) in (6):

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{120} q_0 l^4 + \frac{1}{6} C_1 l^3 - \frac{1}{12} q_0 l^4 - \frac{1}{2} C_1 l^3 - \frac{1}{6} C_1 l^3 = 0 \\
\Leftrightarrow \quad & l^3 C_1 \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{2} - \frac{1}{6} \right) = \frac{9}{120} q_0 l^4 \\
\Leftrightarrow \quad & C_1 = -\frac{3}{20} q_0 l \qquad (9)
\end{aligned}
$$

(9) in (8):

$$C_2 = -\frac{1}{6} q_0 l^2 + \frac{3}{20} q_0 l^2 = -\frac{1}{60} q_0 l^2 \qquad (10)$$

(9) in (5):

$$C_4 = \frac{1}{40} q_0 l^4$$

$$\Rightarrow \quad w(x) = \frac{1}{EI}\left(\frac{1}{120}q_0\frac{x^5}{l} - \frac{1}{40}q_0 l x^3 - \frac{1}{120}q_0 l^2 x^2 + \frac{1}{40}q_0 l^4\right)$$

Federkraft:

$$\begin{aligned} F_c &= Q(0) = w(0)\cdot c \\ &= \frac{c}{EI}\frac{q_0 l^4}{40} = \frac{3}{20}q_0 l \end{aligned}$$

b) Maximales $M \quad \Rightarrow \quad Q(x^*) = 0 \quad$ (x^*: Stelle des Maximums)

$$\begin{aligned} &\leadsto \quad \frac{1}{2}q_0\frac{x^{*\,2}}{l} - \frac{3}{20}q_0 l = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad x^{*\,2} = \frac{3}{10}l^2 \\ &\Leftrightarrow \quad x^* = \sqrt{\frac{3}{10}}\,l \end{aligned}$$

Aufgabe 3 [25 Punkte]

a)

Axialer Tosionsmomentenverlauf $M_T(x)$ für $0 \leq x \leq l$:

$$
\begin{aligned}
m(x) &= q(x)\frac{-a}{2} = -q_0\frac{a}{2} \ldots \text{längenspezifisches Torsionsmoment} \\
\frac{dM_T}{dx} &= -m(x) = q_0\frac{a}{2} \ldots \text{Momentengleichgewicht entlang der Stabachse} \\
\Rightarrow M_T &= \int -m(x)dx = \int q_0\frac{a}{2}dx = \frac{q_0 a}{2}x + K \ldots \text{Torsionsmoment +} \\
M_T(x=l) &= M_0 = \frac{q_0 a}{2}l + K \ldots \text{Randbedingung am Ende des Stabes} \\
\Rightarrow K &= M_0 - \frac{q_0 a}{2}l \ldots \text{Bestimmung der Integrationskonstanten} \\
\Rightarrow M_T(x) &= \frac{q_0 a}{2}x + M_0 - \frac{q_0 a}{2}l = M_0 - \frac{q_0 a}{2}(l-x) \ldots \text{Einsetzen und Auswertung} \\
M_T(x) &= -2M_0 + \frac{q_0 a}{2}x \ldots \text{Torsionsmomentenverlauf}
\end{aligned}
$$

b)

Berechnung der Nullstelle x_0 bezüglich des Torsionsmoments M_T:

$$
\begin{aligned}
M_T(x) &= 0 := M_T(x_0) \ldots \text{Bestimmungsgleichung} \\
\Rightarrow 0 &= M_0 - \frac{q_0 a}{2}(l-x_0) = M_0 - \frac{\overbrace{q_0 a l}^{6M_0}}{2} + \frac{q_0 a}{2}x_0 = -2M_0 + \frac{q_0 a}{2}x_0 \ldots \text{Einsetzen} \\
\Rightarrow x_0 &= \frac{4M_0}{q_0 a} = \frac{2}{3}l \ldots \text{Auswerten}
\end{aligned}
$$

c)

Bestimmung des Torsionsspannungsverlaufs $\tau(x)$ und des zugehörigen Extremalwertes:

$$
\begin{aligned}
\tau(x) &= \frac{M_T(x)}{2\Phi t} \ldots \text{Torsionspannung} \\
h &= \sqrt{a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}a \ldots \text{Höhe des Dreicksquerschnitts} \\
\Phi &= \frac{1}{2}at = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 \ldots \text{Querschnittsfläche} \\
\tau(x) &= \frac{M_0 - \frac{q_0 a}{2}(l-x)}{2\frac{\sqrt{3}}{4}a^2 t} = \frac{2M_0 - q_0 a(l-x)}{\sqrt{3}a^2 t} = \frac{q_0 a x - 4M_0}{\sqrt{3}a^2 t} \ldots \text{Torsionspannung}
\end{aligned}
$$

Da es sich beim Torsionsspannungsverlauf offensichtlich um eine lineare Funktion handelt, können die Extremalwerte bzw. $|\tau|_{max}$ nur an den Intervallgrenzen, d.h. entweder bei $x = 0$ oder $x = l$ auftreten.

$$\begin{aligned}
\tau(x=0) &= \frac{2M_0 - \overbrace{q_0 a l}^{6M_0}}{\sqrt{3}a^2 t} = -\frac{4M_0}{\sqrt{3}a^2 t} \ldots \text{Extremum im Einspannquerschnitt} \\
\tau(x=l) &= \frac{2M_0}{\sqrt{3}a^2 t} = \ldots \text{Extremum im Querschnitt am Stabende}
\end{aligned}$$

Torsionsspannungsextremum

$$|\tau(x=l)| \leq |\tau(x=0)| \Rightarrow |\tau|_{max} = |\tau(x=0)| = \frac{4M_0}{\sqrt{3}a^2 t}$$

d)

Bestimmung des Torsionsträgheitsmoments I_T:

$$\begin{aligned}
I_T &= \frac{4\Phi^2}{\oint \frac{ds}{t}} \ldots \text{Torsionsträgheitsmoment} \\
\oint \frac{ds}{t} &= 3\frac{a}{t} \ldots \text{Bestimmung des Linienintegrals} \\
I_T &= \frac{4\left(\frac{\sqrt{3}}{4}a^2\right)^2}{3\frac{a}{t}} = \frac{1}{4}a^3 t \ldots \text{Auswertung Torsionsträgheitsmoment}
\end{aligned}$$

e)

Bestimmung des Verdrehwinkelverlaufs $\vartheta(x)$ und des zugehörigen Extremalwertes:

$$\begin{aligned}
\frac{d\vartheta(x)}{dx} &= \frac{M_T(x)}{GI_T} = \frac{M_0 - \frac{q_0 a}{2}(l-x)}{G\frac{1}{4}a^3 t} \ldots \text{Bestimmungsgleichung} \\
\frac{d\vartheta(x)}{dx} &= \frac{4M_0 - 2q_0 a(l-x)}{Ga^3 t} = \frac{-8M_0 + 2q_0 a x}{Ga^3 t} \ldots \text{Auswertung} \\
\vartheta(x) &= \frac{2}{Ga^3 t}\int (q_0 a x - 4M_0)\, dx = \frac{2}{Ga^3 t}\left(\frac{q_0 a x^2}{2} - 4M_0 x\right) + C \ldots \text{Integration} \\
\vartheta(x=0) &= 0 = C \ldots \text{Randbedingung} \\
\vartheta(x) &= \frac{q_0 a x^2 - 8M_0 x}{Ga^3 t} \ldots \text{Axialer Verdrehwinkelverlauf}
\end{aligned}$$

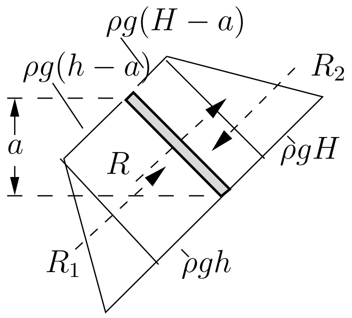
Verdrehwinkelextremum

$$
\begin{aligned}
\frac{d\vartheta(x)}{dx} &= 0 =: \left.\frac{d\vartheta(x)}{dx}\right|_{x=x_1} \ldots \text{Bestimmungsgleichung} \\
\left.\frac{d\vartheta(x)}{dx}\right|_{x=x_1} &= \left.\frac{d}{dx}\left(\frac{q_0 a x^2 - 8M_0 x}{Ga^3 t}\right)\right|_{x=x_1} = \frac{2q_0 a x_1 - 8M_0}{Ga^3 t} = 0 \ldots \text{Auswertung} \\
x_1 &= \frac{4M_0}{q_0 a} = \frac{2}{3} l \ldots \text{Ort der extremalen Verdrehung} \\
\vartheta(x_1) &= \frac{q_0 a \left(\frac{4M_0}{q_0 a}\right)^2 - 8M_0 \frac{4M_0}{q_0 a}}{Ga^3 t} = \frac{\frac{16M_0^2}{q_0 a} - \frac{32M_0^2}{q_0 a}}{Ga^3 t} \ldots \text{Auswertung Verdrehwinkel} \\
\vartheta(x_1) &= -\frac{16M_0^2}{Gq_0 a^4 t} = -\frac{8M_0 l}{3Ga^3 t} \ldots \text{Extremaler Verdrehwinkel}
\end{aligned}
$$

Aufgabe 4a [21 Punkte]

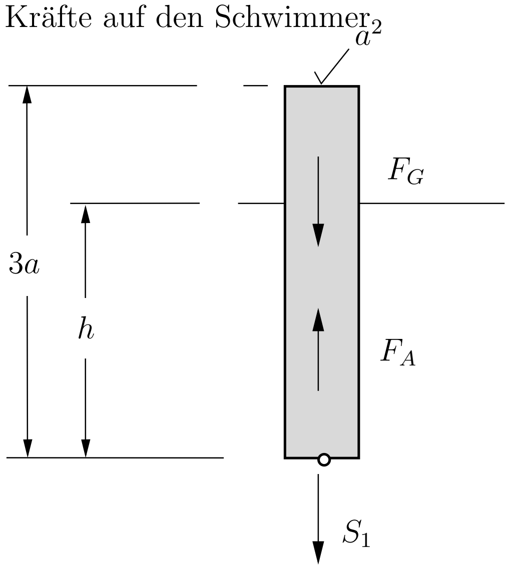
nur für WI-BI, BI, Mathe und Geo.

a) Resultierende des Wasserdrucks auf die Platte:



$$\begin{aligned} R_1 &= (H-a)\rho g(\sqrt{2}a)^2 + \tfrac{1}{2}a\rho g(\sqrt{2}a)^2 \\ &= \rho g a^2(2H-a) \\ R_2 &= \rho g a^2(2h-a) \qquad \text{(analog zu } R_1) \\ R &= R_1 - R_2 = 2\rho g a^2(h-H) \end{aligned}$$

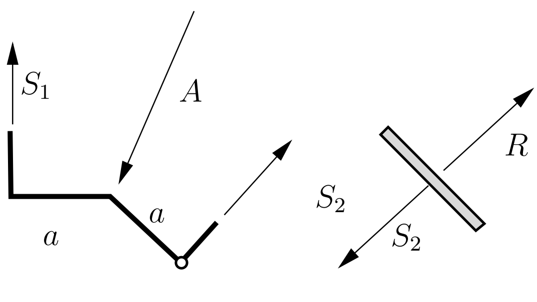
b) Kräfte auf den Schwimmer



Auftrieb : $F_A = V_A\rho g = ha^2\rho g$
Gewichtskraft : $F_G = V_S\rho_S g = 3a^3\rho_S g$
Stabkraft :

$$S_1 = F_A - F_G = \rho g a^2(h - 3a\frac{\rho_S}{\rho})$$

c) Grenzfall: Verschwindende Kontaktkraft an der Platte



GG an der Platte: $S_2 = R$
GG am Hebel: $S_1 = S_2$

Ausrechnen:

$$\rho g a^2(h^\star - 3a\frac{\rho_S}{\rho}) = 2\rho g a^2(h^\star - H)$$

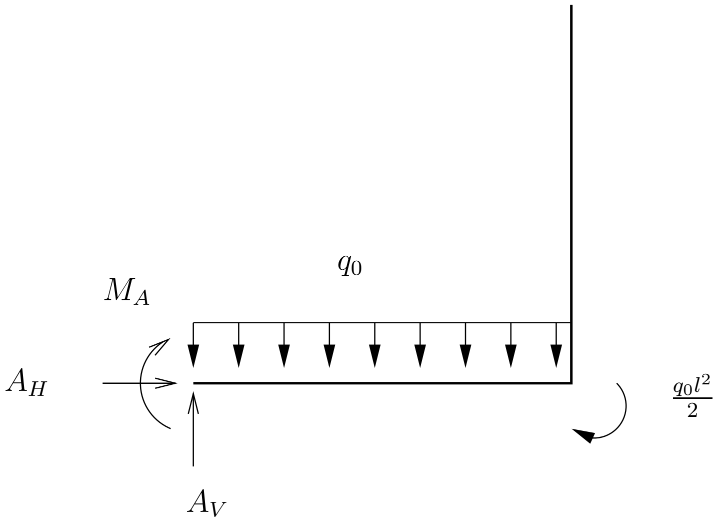
damit folgt

$$h^\star = 2H - 3a\frac{\rho_S}{\rho}$$

Aufgabe 4b [21 Punkte]

nur für WI-MB, MB, MPE, CMPE, CE und Mechanik

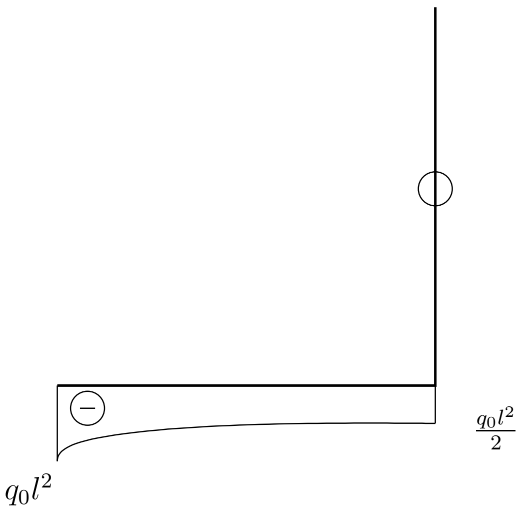
"0" System:



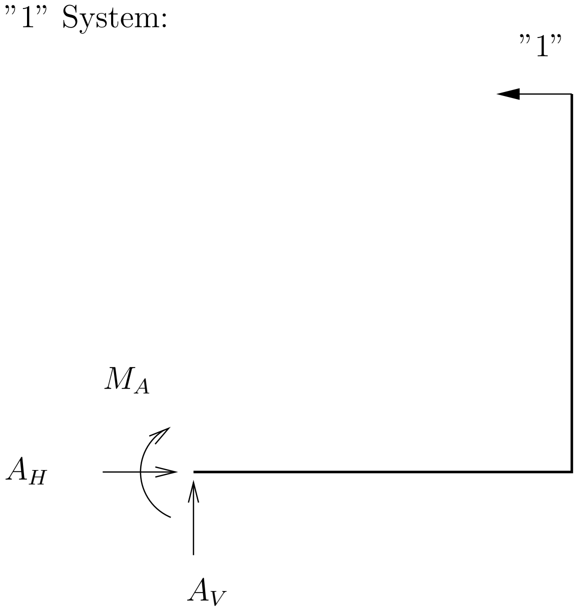
Gleichgewicht:

$$\begin{aligned}
\rightarrow &: \quad A_H = 0 \\
\uparrow &: \quad A_V - q_0 l = 0 \qquad \Rightarrow \qquad A_V = q_0 l \\
\overset{\frown}{A} &: \quad M_A + \frac{q_0 l^2}{2} + \frac{q_0 l^2}{2} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad M_A = -q_0 l^2
\end{aligned}$$

Momentenverlauf im "0" System:



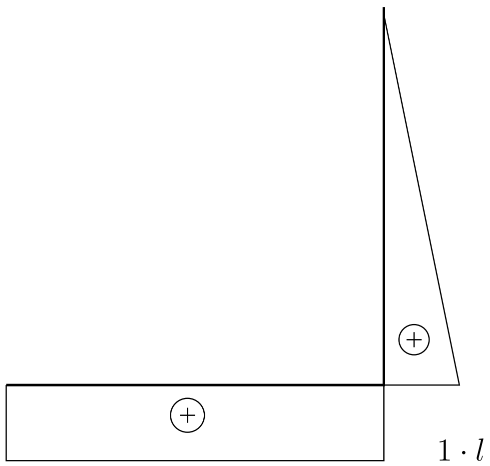
"1" System:



Gleichgewicht:

$$M_A = l$$

Momentenverlauf im "1" System:



Kinematik:

$$\alpha_{10} + X\,\alpha_{11} \;=\; 0$$

Berechnung von α_{10}:

$$\begin{aligned}
\alpha_{10} &= \int \frac{\overline{M}_1 M_0}{EI}\,dx \text{ auf } N_0 = 0 \\
&= \frac{1}{EI}\left\{-\frac{q_0 l^4}{2} - \frac{q_0 l^4}{6}\right\} \;=\; -\frac{2}{3}\frac{q_0 l^4}{EI}
\end{aligned}$$

Berechnung von α_{11}:

$$\begin{aligned}
\alpha_{11} &= \int \frac{\overline{M}_1 \overline{M}_1}{EI}\,dx \;+\; \frac{\overline{S}_1 \overline{S}_1}{EA} l \\
&= \frac{1}{EI}\left\{l^3 + \frac{1}{3} l^3\right\} \;+\; \frac{l}{EA} \;=\; \frac{4}{3}\frac{l^3}{EI} \;+\; \frac{l}{EA}
\end{aligned}$$

Eingesetzt in die Kinematik ergibt sich:

$$-\frac{2}{3}\frac{q_0 l^4}{EI} + X\left(\frac{4}{3}\frac{l^3}{EI} + \frac{l}{EA}\right) \;=\; 0$$

Daraus ergibt sich für die Unbekannte X:

$$X \;=\; S \;=\; \frac{2 q_0 l^3}{3EI\left(\frac{1}{EA} + \frac{4l^2}{3EI}\right)}$$

Alternative Lösung mit der Biegelinientafel:
Alle Verlängerungen nach rechts werden positiv gezählt.

Stabverlängerung $\triangle l_S$:

$$\triangle l_S = \frac{Sl}{EA}$$

Verschiebung $\triangle l_1$ des Balkenendes (wo S angreift) infolge der Gleichstreckenlast q_0:

$$\triangle l_1 = \frac{q_0 l^3}{6EI}\, l$$

Verschiebung $\triangle l_2$ des Balkenendes (wo S angreift) infolge des angreifenden Moments M_0:

$$\triangle l_2 = \frac{M_0 l}{EI}\, l = \frac{q_0 l^3}{2EI}\, l$$

Verschiebung $\triangle l_3$ des Balkenendes infolge der Stabkraft S (Biegung des senkrechten Abschnitts nach links):

$$\triangle l_3 = -\frac{Sl^3}{3EI}$$

Verschiebung $\triangle l_4$ des Balkenendes infolge des Biegemoments Sl (Biegung des waagerechten Abschnitts und dadurch Verschiebung des senkrechten Balkenendes nach links):

$$\triangle l_4 = -\frac{Sl^3}{EI}$$

Die Kinematik lautet:

$$\triangle l_1 + \triangle l_2 + \triangle l_3 + \triangle l_4 = \triangle l_S$$

Alles eingesetzt:

$$\frac{q_0 l^4}{6EI} + \frac{q_0 l^4}{2EI} - \frac{Sl^3}{3EI} - \frac{Sl^3}{EI} = \frac{Sl}{EA}$$

$\Leftrightarrow$

$$S\left(\frac{l}{EA} + \frac{4l^3}{3EI}\right) = \frac{2}{3}\frac{q_0 l^4}{EI}$$

Endergebnis für die Stabkraft S:

$$\boxed{S = \frac{2q_0 l^3}{3EI\left(\frac{1}{EA} + \frac{4l^2}{3EI}\right)}}$$