Prüfung - Technische Mechanik II

WiSe 2019/2020

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

FB 13, Festkörpermechanik
Prof. Dr.-Ing. F. Gruttmann

27. Februar 2020

Name: **Lösungen**

Matr.-Nr.:

Studiengang:

Platznummer	Raumnummer

Die Aufgaben sind nicht nach ihrem Schwierigkeitsgrad geordnet. Bitte beginnen Sie für jede Aufgabe ein neues Blatt und nummerieren Sie die Blätter. Die Bearbeitungszeit beträgt 90 Minuten. Der Lösungsweg muss klar erkennbar sein, die Ergebnisse müssen deutlich hervorgehoben werden. Bei den Kurzfragen wird lediglich das auf den hierfür vorgesehenen Arbeitsblättern eingetragene Ergebnis gewertet.

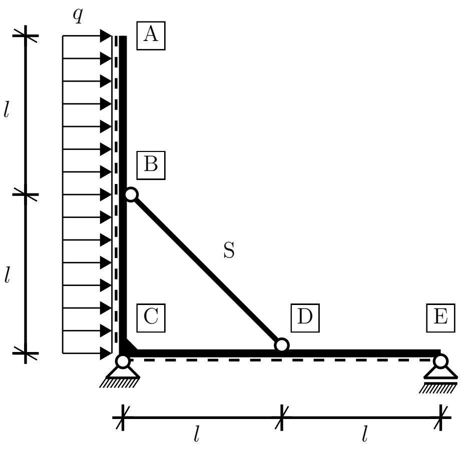
Es ist erlaubt, eine handgeschriebene Formelsammlung im Umfang eines beidseitig beschriebenen DIN A4-Blattes sowie die vier Hilfsblätter zur TM II (Biegelinientafel, Hilfsblatt zur Torsion, Flächenträgheitsmomente, Tafel der Integrale) zu benutzen. Andere Hilfsmittel sind nicht erlaubt. Es wird ausdrücklich darauf hingewiesen, dass keinerlei elektronische Hilfsmittel benutzt werden dürfen. Hierzu zählen insbesondere Taschenrechner, Laptops und Handys.

Viel Erfolg!

Aufgabe	1	2	K1	K2	K3	K4	$\sum$	Note
max. Punkte	25	25	8	8	8	6	80	
erreichte Punkte								
Handzeichen								

	1. Prüfer	2. Prüfer
Name	Prof. Dr.-Ing. F. Gruttmann	Dr.-Ing. D. Johannsen
Unterschrift		

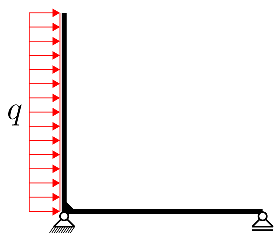
Aufgabe 1 [25 Punkte]

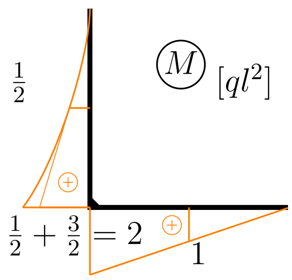


a)

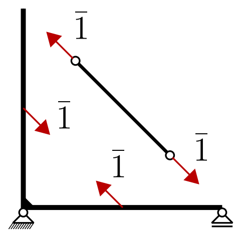
$$\sum F_x = 0: \qquad C_x = -2ql$$
$$\sum M_C^{\circlearrowleft} = 0: \qquad B_y = ql$$
$$\sum F_y = 0: \qquad C_y = -ql$$

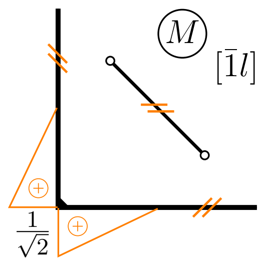
b) Lastzustand:





Einheitszustand X=1:





$$\delta_{10} + \delta_{11} X = 0$$

$$\delta_{10} = \frac{1}{EI}\left[\frac{1}{6}\left(\frac{1}{2} + 2\cdot\frac{3}{2}\right)\frac{1}{\sqrt{2}}ql^4 + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{2}}ql^4 + \frac{1}{6}\left(1 + 2\cdot 2\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}ql^4\right]$$
$$= \left(\frac{7}{12} + \frac{1}{8} + \frac{5}{6}\right)\frac{ql^4}{\sqrt{2}EI} = \frac{37}{24}\frac{ql^4}{\sqrt{2}EI}$$

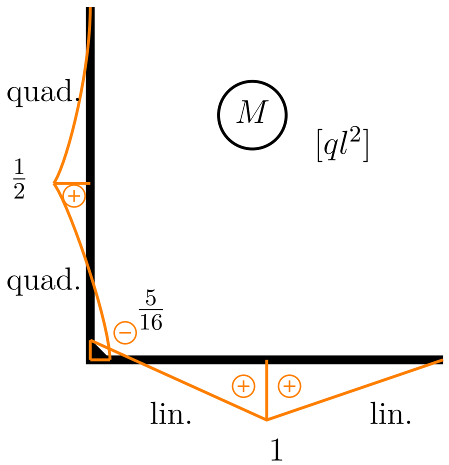
$$\delta_{11} = \frac{1}{EI}\left[2\cdot\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2\cdot l^3\right] = \frac{1}{3}\frac{l^3}{EI}$$

$$\Rightarrow X = -\frac{\delta_{10}}{\delta_{11}} = -\frac{37}{8}\frac{ql}{\sqrt{2}} = S$$

c) Eulerfall 2:

$$F_{krit} = \frac{\pi^2}{(\sqrt{2}l)^2}EI \overset{!}{\geq} -S = \frac{37}{8}\frac{ql}{\sqrt{2}} \qquad \Rightarrow \qquad EI \geq \frac{37ql^3}{4\sqrt{2}\pi^2}$$

d)



$$
\begin{aligned}
M_C &= (2 - \frac{37}{8}\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2}})ql^2 \\
&= \frac{32-37}{16}ql^2 \\
&= -\frac{5}{16}ql^2
\end{aligned}
$$

e)

$$M_C = (2ql^2 + \hat{X}\frac{1}{\sqrt{2}}l) \stackrel{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad \hat{X} = -2\sqrt{2}ql$$

(oder durch $\sum M_A = 0$ am oberen, freigeschnittenen Teilsystem)

$$
\begin{aligned}
\hat{\delta}_{11} &= -\frac{\delta_{10}}{\hat{X}} = \frac{37}{24 \cdot \sqrt{2} \cdot 2 \cdot \sqrt{2}}\frac{ql^4}{qlEI} = \frac{37}{96}\frac{l^3}{EI} \\
\delta_{11}^{EA} &= \hat{\delta}_{11} - \delta_{11}^{EI} = \left(\frac{37}{96} - \frac{1}{3}\right)\frac{l^3}{EI} = \frac{5}{96}\frac{l^3}{EI} \\
&\stackrel{!}{=} \frac{1}{EA} \cdot \bar{1} \cdot \bar{1} \cdot 1\sqrt{2}l \quad \Rightarrow \quad EA = \frac{96\sqrt{2}}{5}\frac{EI}{l^2}
\end{aligned}
$$

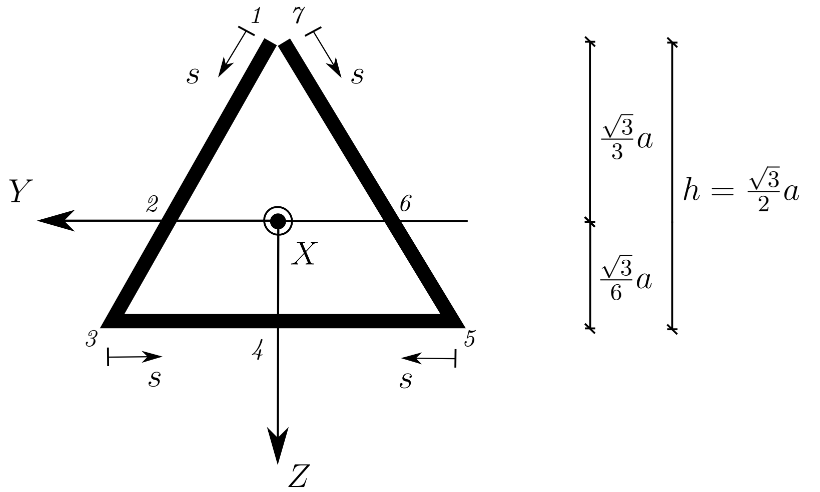
Aufgabe 2 [25 Punkte]

a) Gleichgewichtsbedingungen liefern die gesuchten Schnittgrößen:

$N = Q_y = M_z = 0$ sowie $Q_z = F$, $M_x = \frac{1}{2}lF$, $M_y = -lF$.

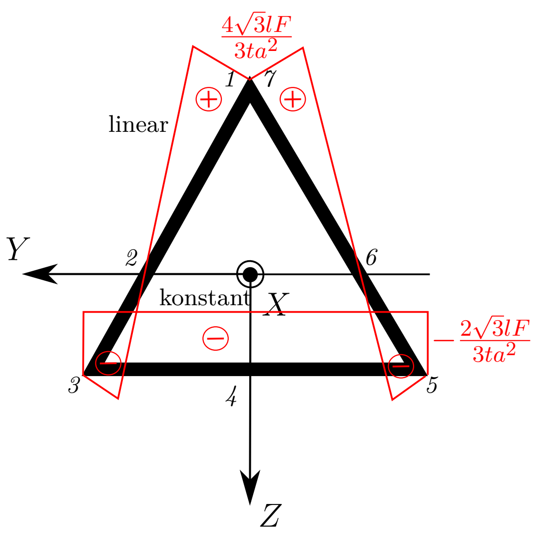
b) Biegespannungsformel: $\sigma_{xx}(z) = \frac{M_y}{I_{yy}}z = \frac{-lF}{\frac{1}{4}ta^3}z = -\frac{4lF}{ta^3}z$.

$$I_{yy} = \underbrace{2 \cdot \frac{1}{12}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}t\right)h^3}_{\text{Anteil aus den Stegen}} + \underbrace{ta\left(\frac{\sqrt{3}}{6}a\right)^2}_{\text{Steineranteil aus Flansch}} + \underbrace{2at\left(\frac{h}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6}a\right)^2}_{\text{Steineranteil aus den Stegen}} = \frac{1}{4}ta^3$$



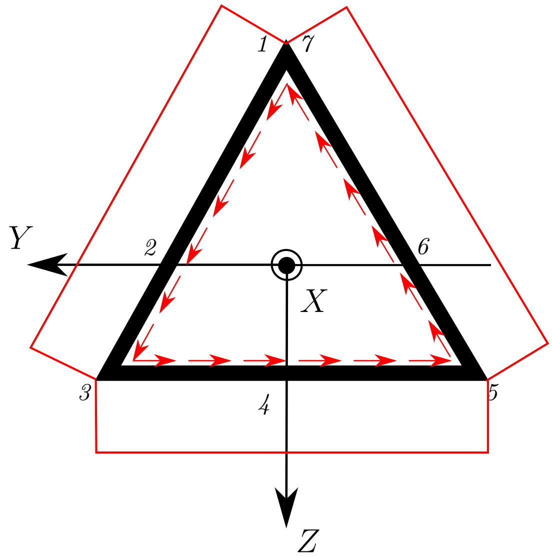
$\sigma_{xx}(-\frac{\sqrt{3}}{3}a) = \frac{4\sqrt{3}\,lF}{3ta^2}$,
$\sigma_{xx}(\frac{\sqrt{3}}{6}a) = -\frac{2\sqrt{3}\,lF}{3ta^2}$.

Biegespannungsverlauf:



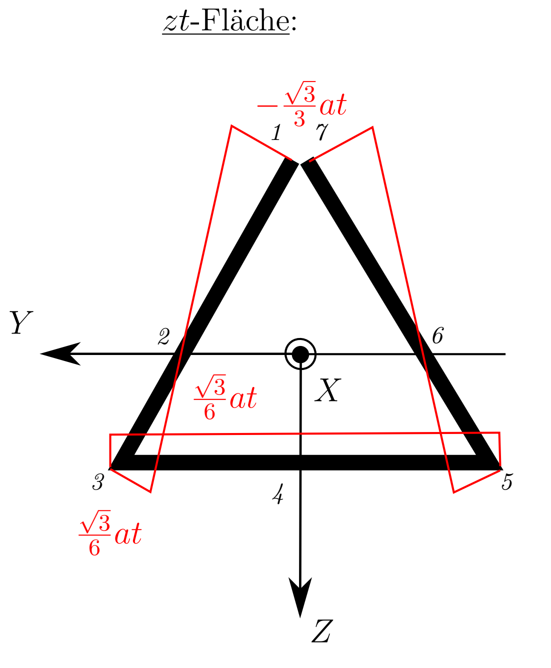
c) 1. Bredtsche Formel: $\tau_T = \frac{T}{2\,t\,A_m}$ mit $A_m = \frac{1}{2}ha = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 - (\frac{a}{2})^2}a = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$

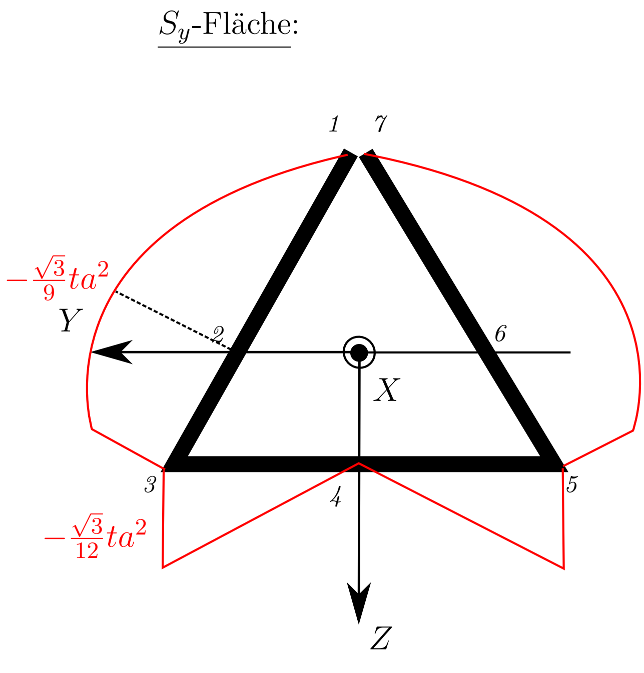
$\Rightarrow \quad \underline{\underline{\tau_T = \frac{lF}{\sqrt{3}ta^2}}}$



d) Bestimmung der Schubspannungen am geschlitzten (offenen) Profil (eigentlich nicht nötig, da der Integrationsbeginn in der Symmetrieachse liegt).

$$\tau_Q = -\frac{Q_z\,S_y}{t\,I_{yy}} \quad \text{mit} \quad Q_z = F,$$



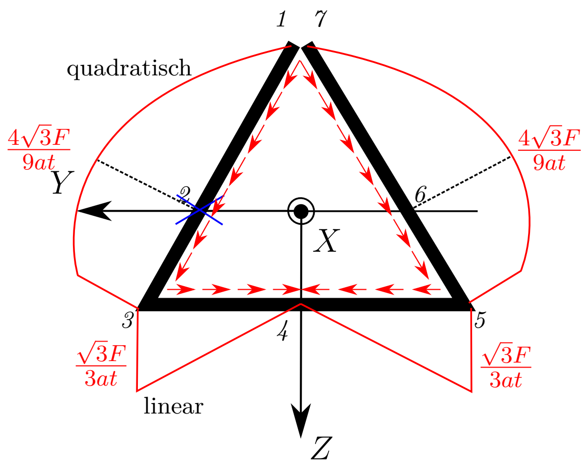


$S_y^1 = 0$ (freies Ende bzw. Symmetrieachse),
$S_y^2 = S_y(s_1 = \frac{2}{3}a) = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}a\cdot(-\frac{\sqrt{3}}{3}at) = -\frac{\sqrt{3}}{9}ta^2,$
$S_y^3 = S_y(s_1 = a) = -\frac{\sqrt{3}}{9}ta^2 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}a\cdot\frac{\sqrt{3}}{6}at = -\frac{\sqrt{3}}{12}ta^2$
$S_y^4 = S_y(s_2 = \frac{a}{2}) = -\frac{\sqrt{3}}{12}ta^2 + \frac{1}{2}\cdot a\cdot\frac{\sqrt{3}}{6}at = 0,$
$S_y^5 = S_y^3$ etc.

Querschubspannungen τ_Q:

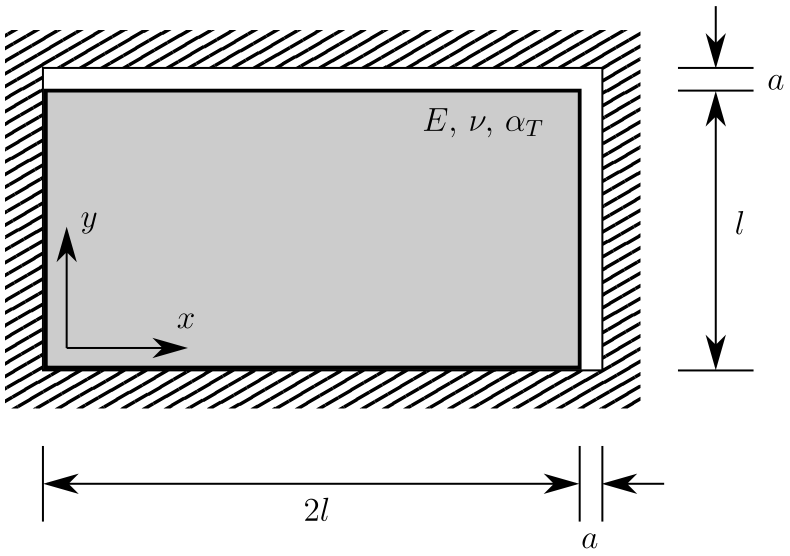
$$\tau_Q^1 = 0,$$
$$\tau_Q^2 = -\frac{Q_z\, S_y^2}{t\, I_{yy}} = +\frac{4\sqrt{3}F}{9ta},$$
$$\tau_Q^3 = -\frac{Q_z\, S_y^3}{t\, I_{yy}} = +\frac{\sqrt{3}F}{3ta},$$
$$\tau_Q^4 = -\frac{Q_z\, S_y^4}{t\, I_{yy}} = 0,$$
$$\tau_Q^5 = -\frac{Q_z\, S_y^5}{t\, I_{yy}} = \tau_Q^3 \quad \text{etc.}$$

Querschubspannungsverlauf:



e) Siehe Diagramm zum Querschubspannungsverlauf in Teilaufgabe d).

Kurzfrage 1 [8 Punkte]



Die dargestellte rechteckige Scheibe wird in einen starren Ausschnitt eingesetzt. Dieser ist in beiden Richtungen um a größer als die Scheibe. Es wird angenommen, dass zwischen dem Ausschnitt und der Scheibe keine Reibung herrscht und ein ebener Spannungszustand ($\sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$) vorliegt. Die Scheibe wird um ΔT erwärmt.

Bestimmen Sie

a) ΔT_a so, dass sich der rechte Spalt gerade schließt.

$$\Delta T_a = \boxed{\frac{a}{2l\alpha_T}}$$

b) die Längenänderung Δl_y der Scheibe in y-Richtung infolge ΔT_a.

$$\Delta l_y = \boxed{\frac{a}{2}}$$

c) ΔT_b so, dass beide Spalte gerade geschlossen sind.

$$\Delta T_b = \boxed{\frac{1+\frac{\nu}{2}}{1+\nu} \cdot \frac{a}{\alpha_T l}}$$

Hinweis: Vereinfachen Sie alle Terme so weit wie möglich.

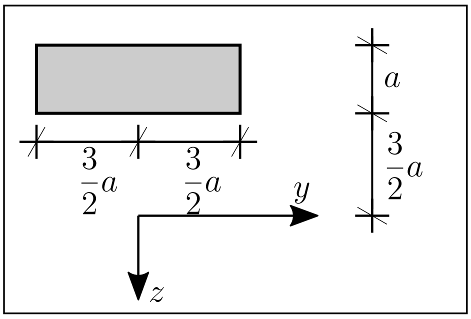
Gegeben: E, ν, α_T, l, a

Kurzfrage 2 [8 Punkte]

Berechnen Sie zunächst die Flächenträgheitsmomente I_{y1}, I_{y2} und I_{y3} für die gegebenen Teilflächen 1 bis 3.
Bestimmen Sie nun das Flächenträgheitsmoment I_y für das abgebildete symmetrische Vollprofil, aus dem rechteckige Öffnungen herausgeschnitten wurden.

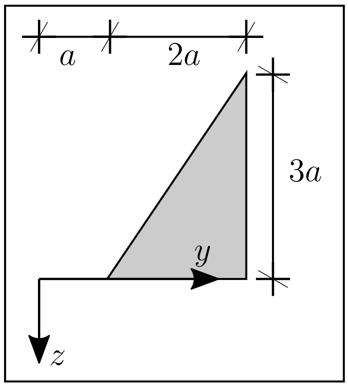
Gegeben: a

Teilfläche 1:



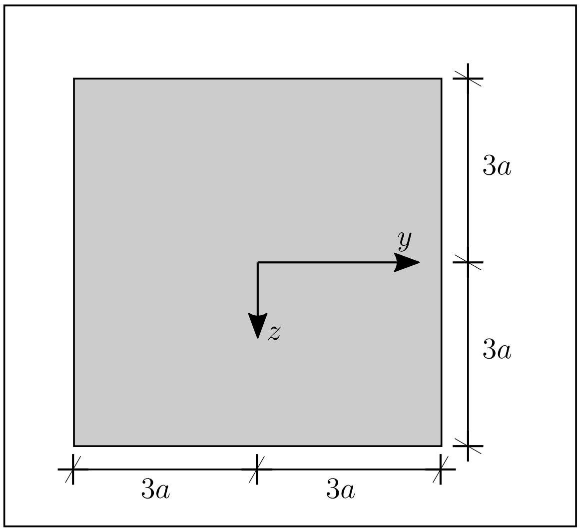
$I_{y1}=$ $\frac{49}{4}a^4$

Teilfläche 2:



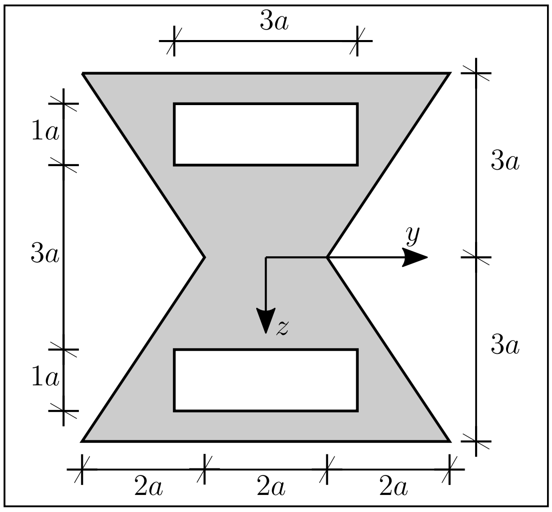
$I_{y2}=$ $\frac{9}{2}a^4$

Teilfläche 3:



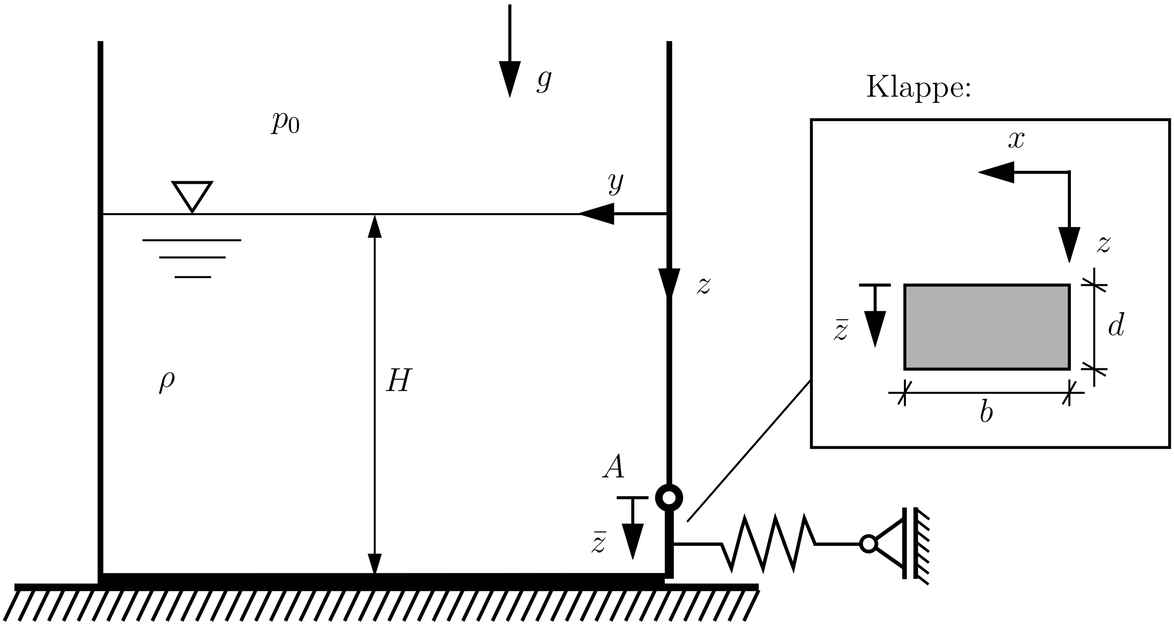
$I_{y3}=$ $108a^4$

Vollprofil:



$I_y=$ $\frac{131}{2}a^4$

Kurzfrage 3 [8 Punkte]



Ein offener Behälter ist bis zur Höhe H mit einer Flüssigkeit der Dichte ρ gefüllt. An der rechten unteren Seite besitzt der Behälter eine um A drehbare, rechteckige Klappe (Breite b, Höhe d), die mit einer vorgespannten Feder (Federkraft $F_c = 4\rho g b d^2$) geschlossen gehalten wird. Die Feder ist im Mittelpunkt der Klappe angebracht.

Gegeben: p_0, ρ, g, H, b, d, $F_c = 4\rho g b d^2$

Bestimmen Sie unter Vernachlässigung des Umgebungsdrucks p_0

a) unter Vernachlässigung des Umgebungsdrucks p_0 die resultierende Kraft F_R, die von der Flüssigkeit auf die Klappe ausgeübt wird.

$$F_R = \boxed{\rho g b d \left(H - \frac{d}{2}\right)}$$

b) den Abstand $\bar{z}_R$ zwischen A und der Stelle, an der F_R auf die Klappe wirkt.

$$\bar{z}_R = \boxed{\left[\frac{3H-d}{6\left(H-\frac{d}{2}\right)}\right] d = \left[\frac{d}{12\left(H-\frac{d}{2}\right)} + \frac{1}{2}\right] d}$$

c) die Füllhöhe $H = H_{max}$, bei der sich die Klappe gerade öffnet.

$$H_{max} = \boxed{\frac{13}{3} d}$$

Kurzfrage 4 [6 Punkte]

Skizzieren Sie rechts neben die folgenden Spannungszustände ($\sigma_0 > 0$, $\tau_0 > 0$) qualitativ den jeweils zugehörigen Mohr'schen Spannungskreis. Kennzeichnen Sie im τ-σ-Diagramm jeweils auch σ_0, τ_0, $2\sigma_0$, sofern diese im Spannungszustand gegeben sind.

Spannungszustand	Mohr'scher Kreis	Spannungszustand	Mohr'scher Kreis