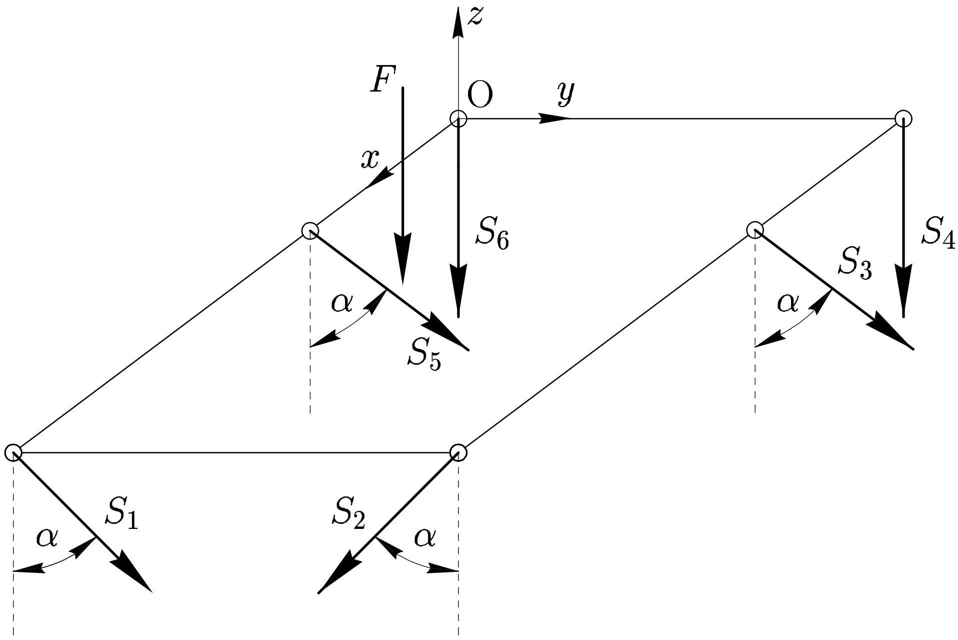
MUSTERLÖSUNGEN TM I

Aufgabe 1 [22 Punkte]

a) Freikörperbild [7 Punkte]



für F [1 Punkt]
für jede richtig freigeschnittene Stabkraft je [1 Punkt]

b) Berechnen der Stabkräfte [15 Punkte]

je Gleichgewichtsbetrachtung [1 Punkt],
alle Gleichgewichtsbetrachtungen der Kräfte richtig + [1 Punkt],
alle Gleichgewichtsbetrachtungen der Momente richtig + [2 Punkte]

$$\sum F_{ix} = 0 = -S_5 \sin\alpha - S_3 \sin\alpha \tag{1}$$

$$\sum F_{iy} = 0 = -S_2 \sin\alpha + S_1 \sin\alpha \tag{2}$$

$$\sum F_{iz} = 0 = -S_1 \cos\alpha - S_2 \cos\alpha - S_3 \cos\alpha - S_5 \cos\alpha - S_4 - S_6 - F \tag{3}$$

$$\sum M_{O\,ix} = 0 = -S_3 \cos\alpha \frac{2}{3}l - S_4 \frac{2}{3}l - S_2 \cos\alpha \frac{2}{3}l - F\frac{1}{4}l \tag{4}$$

$$\sum M_{O\,iy} = 0 = S_1 \cos\alpha\, l + S_2 \cos\alpha\, l + S_3 \cos\alpha \frac{1}{3}l + S_5 \cos\alpha\frac{1}{3}l + F\frac{1}{2}l \tag{5}$$

$$\sum M_{O\,iz} = 0 = S_3 \sin\alpha \frac{2}{3}l - S_2 \sin\alpha\, l + S_1 \sin\alpha\, l \tag{6}$$

Auswertung der Gleichungen:

je richtiger Stabkraft [1 Punkt]

$$\text{aus (1)} \quad S_3 = -S_5 \tag{7}$$
$$\text{aus (2)} \quad S_1 = S_2 \tag{8}$$

(7) und (8) eingesetzt in (6)

$$\frac{2}{3}S_3 - S_2 + S_2 = 0 \quad \Rightarrow \underline{\underline{S_3 = 0 \Rightarrow S_5 = 0}} \tag{9}$$

(8) und (9) eingesetzt in (5)

$$S_2 \cos\alpha\, l + S_2 \cos\alpha\, l + F\,\frac{1}{2}l = 0 \quad \Rightarrow \underline{\underline{S_2 = S_1 = -\frac{1}{4\cos\alpha}\,F}} \tag{10}$$

(9) und (10) eingesetzt in (4)

$$-\frac{2}{3}l\,S_4 + \frac{1}{6}l\,F - \frac{1}{4}l\,F = 0 \quad \Rightarrow \underline{\underline{S_4 = -\frac{1}{8}\,F}} \tag{11}$$

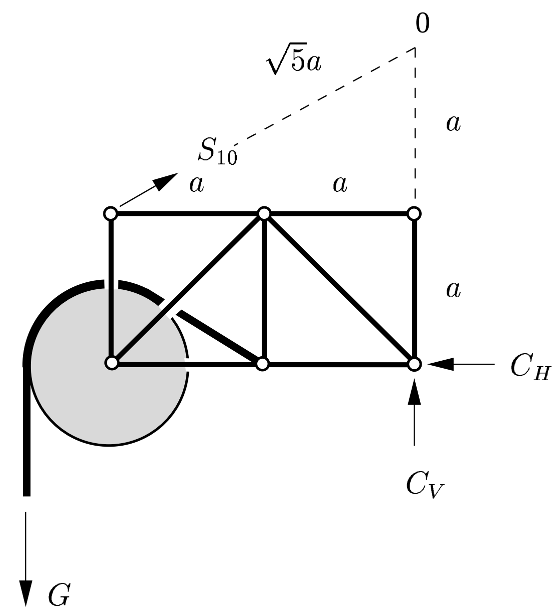
(9), (10) und (11) eingesetzt in (3)

$$\frac{1}{2}l\,F + \frac{1}{8}l\,F - S_6 - F = 0 \quad \Rightarrow \underline{\underline{S_6 = -\frac{3}{8}\,F}}$$

Aufgabe 2 [20 Punkte]

a) Komponenten C_H und C_V der Gelenkkraft C sowie die Lagerkraft B

FKB [2 Punkte]



Gleichgewicht: (diverse Möglichkeiten !)

GG je [1 Punkt], C_H, C_V und B je [1 Punkt]

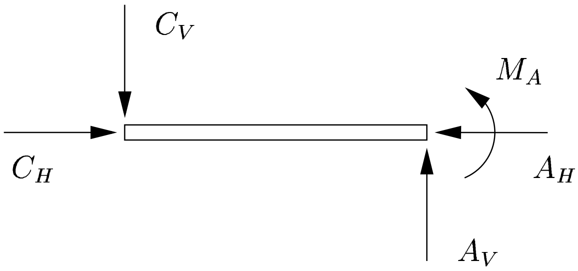
$$\overset{\curvearrowleft}{0} \;:\quad G\frac{5}{2}a - C_H 2a = 0 \qquad \Rightarrow \qquad C_H = \frac{5}{4}G$$

$$\overset{\curvearrowleft}{0} \;:\quad G\frac{5}{2}a - \frac{2}{\sqrt{5}}S_{10}2a = 0 \qquad \Rightarrow \qquad B = S_{10} = \frac{5\sqrt{5}}{8}G$$

$$\uparrow \;:\quad C_V + \frac{1}{\sqrt{5}}S_{10} - G = 0 \qquad \Rightarrow \qquad C_V = \frac{3}{8}G$$

Geometrie: $B_H = 2B_V$

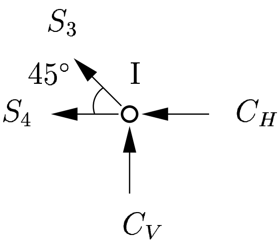
b)



$$\overset{\frown}{A}: \quad C_V 2a + M_A = 0 \quad \Rightarrow \underline{\underline{M_a = -\frac{3}{4}aG}}$$

c)

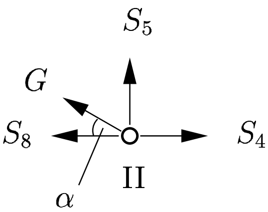
$$\underline{\underline{S_1 = S_2 = 0}}$$



Knoten I

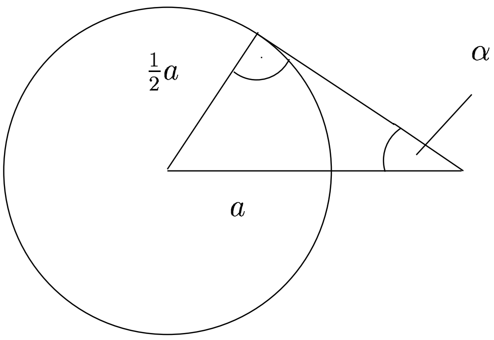
$$\uparrow \; : \quad \frac{\sqrt{2}}{2}S_3 + C_V = 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{S_3 = -\frac{3}{8}\sqrt{2}G}}$$

$$\leftarrow \; : \quad S_4 + \frac{\sqrt{2}}{2}S_3 + C_H = 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{S_4 = -\frac{7}{8}G}}$$



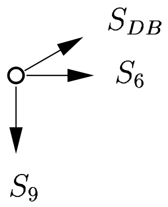
Knoten II

$$\uparrow \; : \quad S_5 + G\sin\alpha = 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{S_5 = -\frac{1}{2}G}}$$



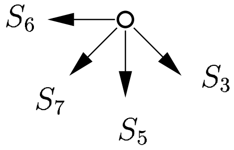
$$\alpha = 30° \quad \Rightarrow \quad \sin\alpha = \frac{1}{2}$$

Alternativ:



$$\rightarrow \; : \quad S_6 + S_{DB}^H = 0$$

$$\Rightarrow \quad S_6 = S_{DB}^H = B_H = -\frac{5}{4}G$$



$$\rightarrow \; : \quad \frac{\sqrt{2}}{2}S_3 - S_6 - \frac{\sqrt{2}}{2}S_7 = 0$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2}S_7 = \frac{\sqrt{2}}{2}S_3 - S_6 = -\frac{3}{8}G + \frac{5}{4}G = \frac{7}{8}G$$

$$S_7 = \frac{7}{8}\sqrt{2}G$$

$$\downarrow \; : \quad S_5 + \frac{\sqrt{2}}{2}S_7 + \frac{\sqrt{2}}{2}S_3 = 0$$

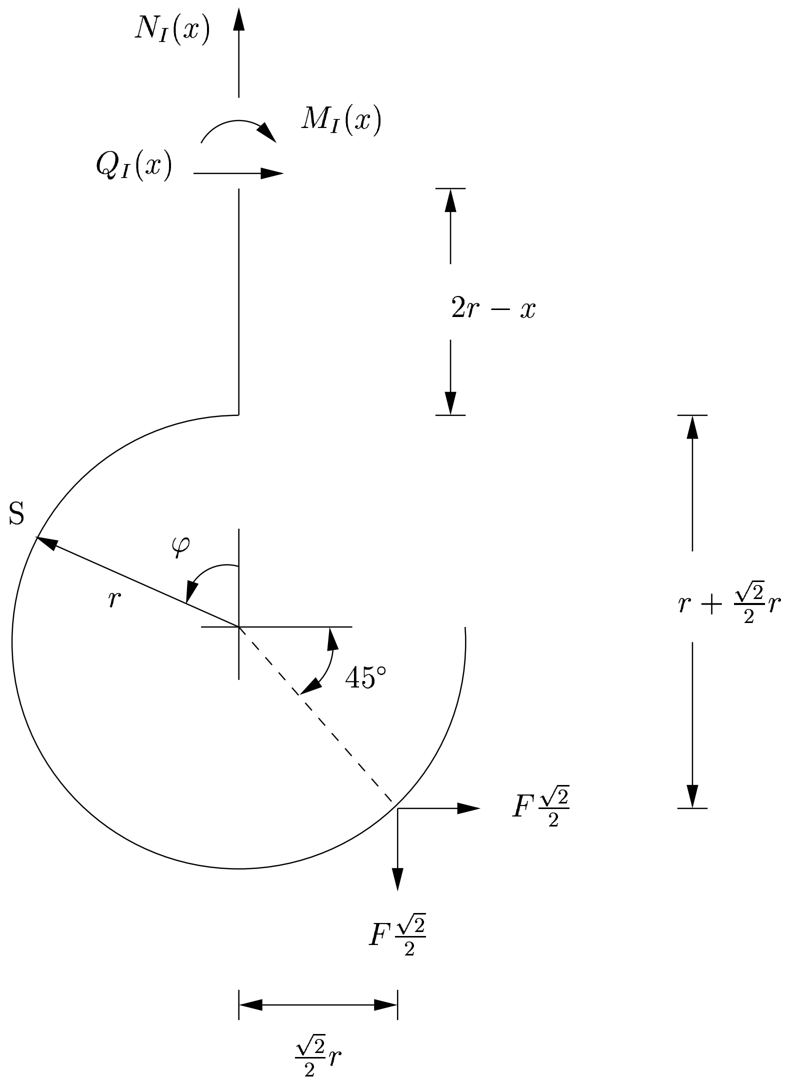
$$S_5 = -\frac{\sqrt{2}}{2}(S_7 - S_3)$$

$$= -\frac{\sqrt{2}}{2}(\frac{7}{8}\sqrt{2} - \frac{3}{8}\sqrt{2})G = -\frac{1}{2}G$$

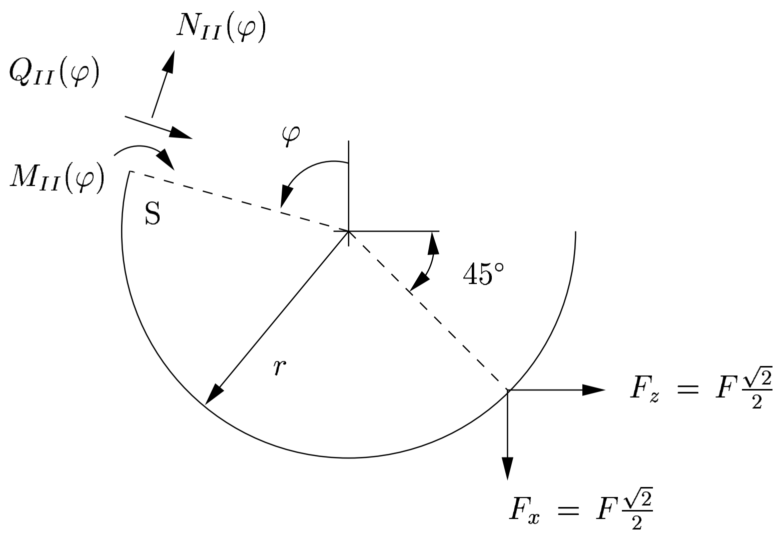
Aufgabe 3 [25 Punkte]

Freikörperbilder:

Gesamtsystem:



Teil II:



Aufgabenteil a):

Gleichgewicht am Gesamtsystem:

$$\sum F_x : \quad -N_I(x) + F\frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \qquad \rightarrow \qquad \boxed{N_I(x) = F\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

$$\sum F_z : \quad -Q_I(x) - F\frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \qquad \rightarrow \qquad \boxed{Q_I(x) = -F\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

$$\overset{\frown}{A}: \quad -M_I(x) - F\frac{\sqrt{2}}{2}r\frac{\sqrt{2}}{2} + F\frac{\sqrt{2}}{2}\left(3r - x + r\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 0$$

$$\rightarrow \qquad \boxed{M_I(x) = F\,\frac{3r - x}{2}\sqrt{2}}$$

Gleichgewicht am Teil II:

$$\sum F_x : \quad -N_{II}(\varphi)\sin\varphi + Q_{II}(\varphi)\cos\varphi + F\frac{\sqrt{2}}{2} = 0$$

$$\sum F_z : \quad -N_{II}(\varphi)\cos\varphi - Q_{II}(\varphi)\sin\varphi - F\frac{\sqrt{2}}{2} = 0$$

$$\overset{\frown}{S}: \quad -M_{II} + F\frac{\sqrt{2}}{2}(r\frac{\sqrt{2}}{2} + r\cos\varphi) - F\frac{\sqrt{2}}{2}(r\frac{\sqrt{2}}{2} + r\sin\varphi) = 0$$

$$\rightarrow \qquad \boxed{M_{II}(\varphi) = Fr\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos\varphi - \sin\varphi)}$$

$\Longrightarrow$

$$-N_{II}(\varphi)\left(\sin^2\varphi + \cos^2\varphi\right) + F\frac{\sqrt{2}}{2}(\sin\varphi - \cos\varphi) = 0$$

$$\rightarrow \qquad \boxed{N_{II}(\varphi) = F\frac{\sqrt{2}}{2}(\sin\varphi - \cos\varphi)}$$

$\Longrightarrow$

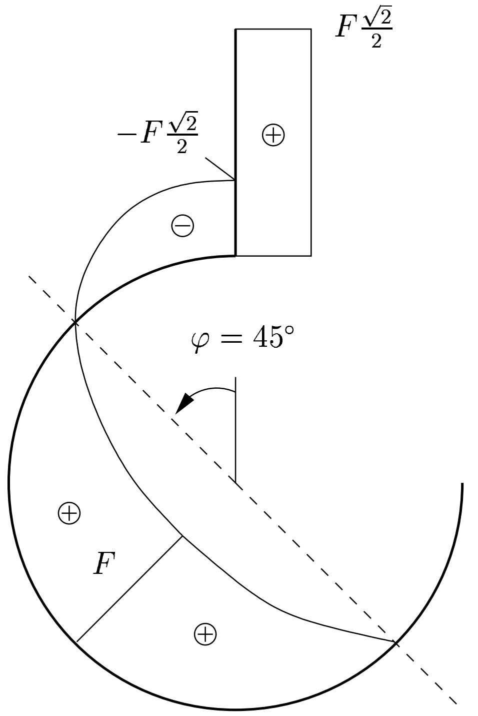
$$Q_{II}(\varphi)\left(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi\right) + F\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos\varphi + \sin\varphi) = 0$$

$$\rightarrow \qquad \boxed{Q_{II}(\varphi) = -F\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos\varphi + \sin\varphi)}$$

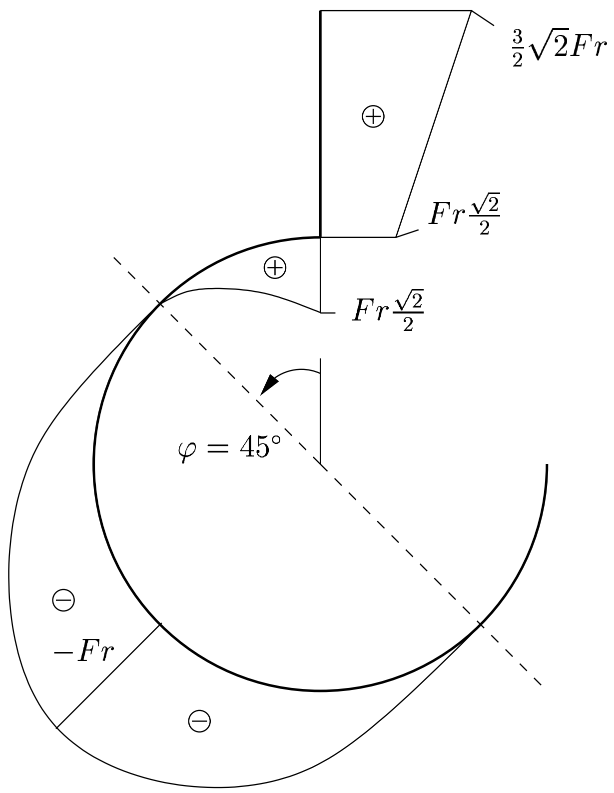
[Kein Punktabzug bei Vorzeichenfehler in $M(\varphi)$ und $Q(\varphi)$!]

Aufgabenteil b):

Normalkraftverlauf



Momentenverlauf



Aufgabe 4 [20 Punkte]

Das Potential ergibt sich zu:

$$U = -Gr\cos\varphi + 4G\frac{1}{2}r\cos\varphi + \frac{1}{2}cr^2\cos^2\varphi = Gr\cos\varphi + \frac{1}{2}cr^2\cos^2\varphi$$

Dessen erste und zweite Ableitungen lauten:

$$U' = -r\sin\varphi\,(G + cr\cos\varphi)$$

$$U'' = -Gr\cos\varphi + cr^2\left(\sin^2\varphi - \cos^2\varphi\right)$$

a) Bestimmung der Gleichgewichtslagen:
Aus $U' = 0$ folgt

$$\sin\varphi = 0 \qquad \text{oder} \qquad \cos\varphi = -\frac{G}{cr}$$

Fallunterscheidung:

$$\frac{G}{cr} \geq 1 \;:\quad \varphi_1 = 0, \quad \varphi_2 = \pi$$

$$\frac{G}{cr} < 1 \;:\quad \varphi_1 = 0, \quad \varphi_2 = \pi, \quad \varphi_3 = \arccos(-\frac{G}{cr}), \quad \varphi_4 = -\arccos(-\frac{G}{cr})$$

b) Untersuchung der Gleichgewichtslagen auf Stabilität:

$$U''(\varphi_1) = -cr^2\left(\frac{G}{cr} + 1\right)$$

$$U''(\varphi_2) = cr^2\left(\frac{G}{cr} - 1\right)$$

$$U''(\varphi_3) = U''(\varphi_4) = cr^2\left(1 - \frac{G^2}{c^2r^2}\right)$$

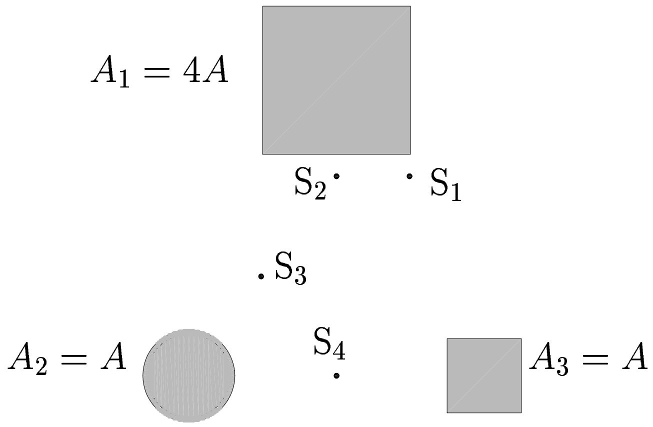
Fallunterscheidung:
$U''(\varphi) < 0$ ist instabil, $U''(\varphi) = 0$: höhere Ableitungen untersuchen, $U''(\varphi) > 0$ ist stabil.

$$\frac{G}{cr} > 1 \;:\quad \varphi_1 \text{ instabil}, \quad \varphi_2 \text{ stabil}$$

$$\frac{G}{cr} = 1 \;:\quad \varphi_1 \text{ instabil}, \quad \varphi_2 \text{ stabil} \quad [U''''(\varphi_2) > 0]$$

$$\frac{G}{cr} < 1 \;:\quad \varphi_1, \varphi_2 \text{ instabil}, \quad \varphi_3, \varphi_4 \text{ stabil}$$

Aufgabe K1 [2 Punkte]



Bei welchem der angegebenen Punkte S_1 bis S_4 handelt es sich um den Gesamtflächenschwerpunkt der drei Teilflächen?

☐ S_1

☐ S_2

☐ S_3

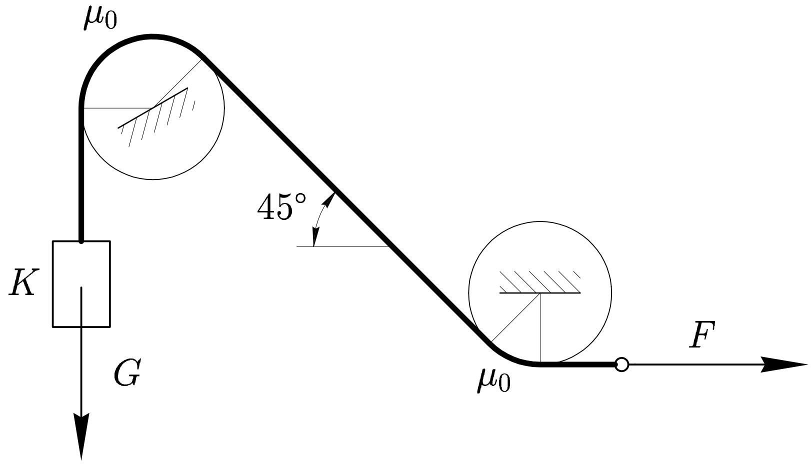
☐ S_4

Aufgabe K2 [4 Punkte]

Kreuzen Sie die Einheiten an, die zu den in der Tabelle angegebenen Größen gehören.

	Nm	N	N/m	dimensionslos	keine davon
Arbeit W					
Moment M					
Erdbeschleunigung g					
Dichte ρ					
Streckenlast q					
Haftungskoeffizient μ_0					
Kraft F					
Potential Π					

Aufgabe K3 [3 Punkte]

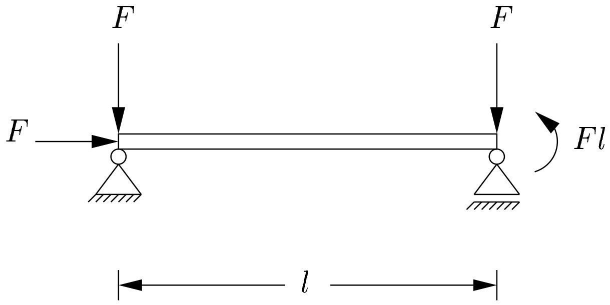


Ein an einer Kiste K (Gewicht G) befestigtes Seil ist um zwei feste Rollen geschlungen. Mit welcher Kraft F muss mindestens am Seil gezogen werden, damit die Kiste nicht nach unten rutscht?

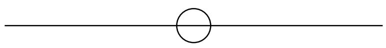
Gegeben: μ_0, G

- ☐ $F = G\, e^{-\pi\, \mu_0}$
- ☐ $F = G\, \sin(\pi\, \mu_0)$
- ☐ $F = G\, e^{-2\pi\, \mu_0}$
- ☐ $F = (\pi\, \mu_0)\, G$

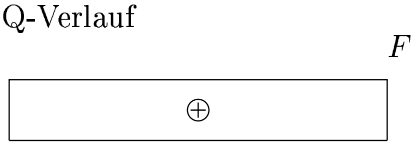
Aufgabe K4 [4 Punkte]



N-Verlauf



Q-Verlauf



M-Verlauf