Musterlösungen
TM I

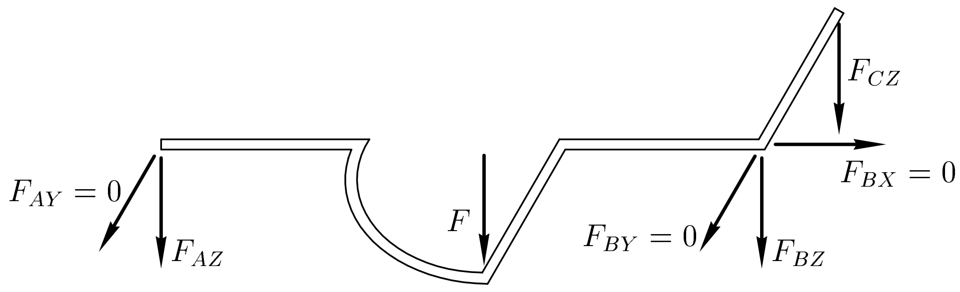
Diplomvorprüfung Technische Mechanik

Sommer 2004

Aufgabe I-1 [22 Punkte]

a) Auflagerreaktionen

Freikörperbild:



Gleichgewicht:

$\sum F_z$: $F + F_{AZ} + F_{BZ} + F_{CZ} = 0$

$\sum M_x^B$: $F\,r - F_{CZ}\,r = 0$

$\sum M_y^B$: $F\,r + F_{AZ}\,3r = 0$

Auflösung:

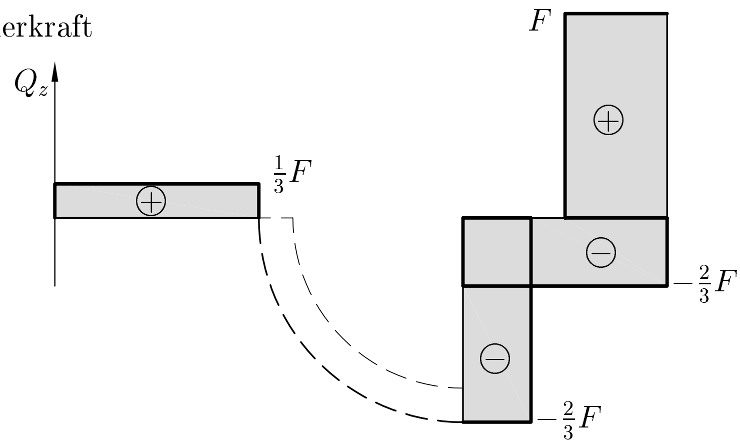
$F_{AZ} = -\dfrac{1}{3}F$

$F_{CZ} = F$

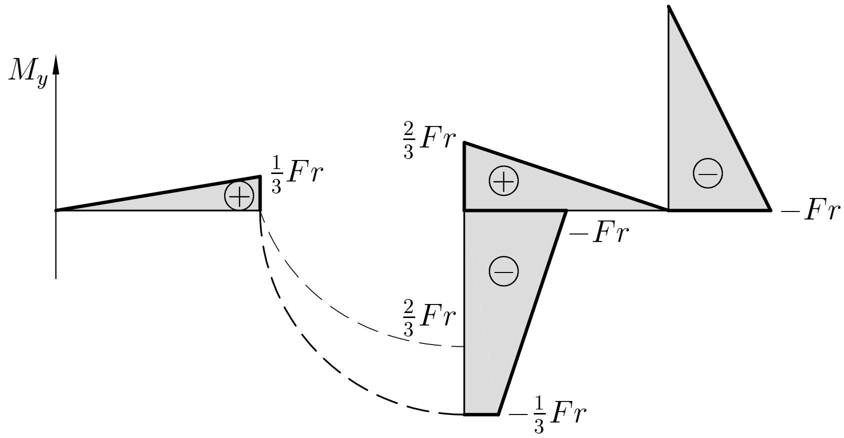
$F_{BZ} = -\dfrac{5}{3}F$

b) Schnittgrößenlinien (Die gestrichelten Kurvenstücke waren nicht gefragt, sie sind nur zur Orientierung eingezeichnet.)

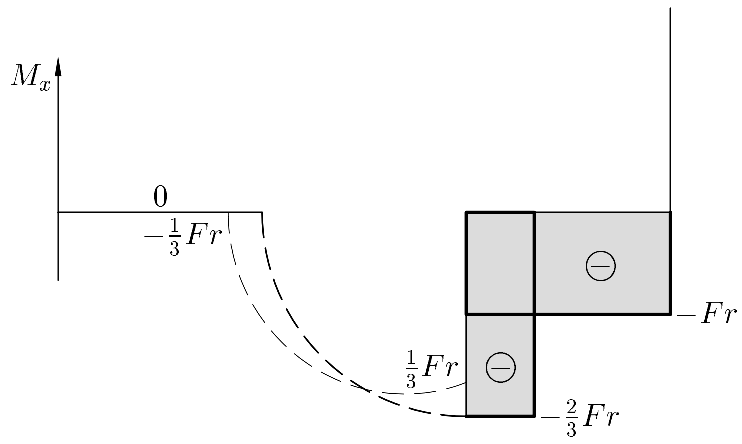
Querkraft



Biegemoment

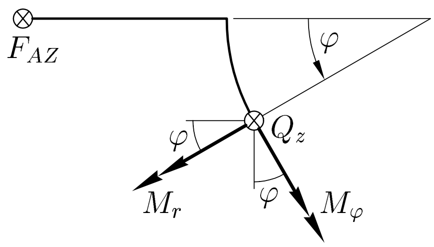


Torsionsmoment



c) Schnittlasten im Bogen $0 \leq \varphi \leq \dfrac{\pi}{2}$

Freikörperbild:



Gleichgewicht:

$\sum F_z$: $\quad Q_Z + F_{AZ} = 0$

$$\sum M_x^P: \quad -F_{AZ}\, r\, \sin\varphi - M_r\, \cos\varphi + M_\varphi\, \sin\varphi = 0 \tag{1}$$

$$\sum M_y^P: \quad F_{AZ}\,(2r - r\, \cos\varphi) + M_r\, \sin\varphi + M_\varphi\, \cos\varphi = 0 \tag{2}$$

Auflösung:

$(1)\sin\varphi + (2)\cos\varphi: \qquad F_{AZ}\, r\,(2\cos\varphi - 1) + M_\varphi = 0$

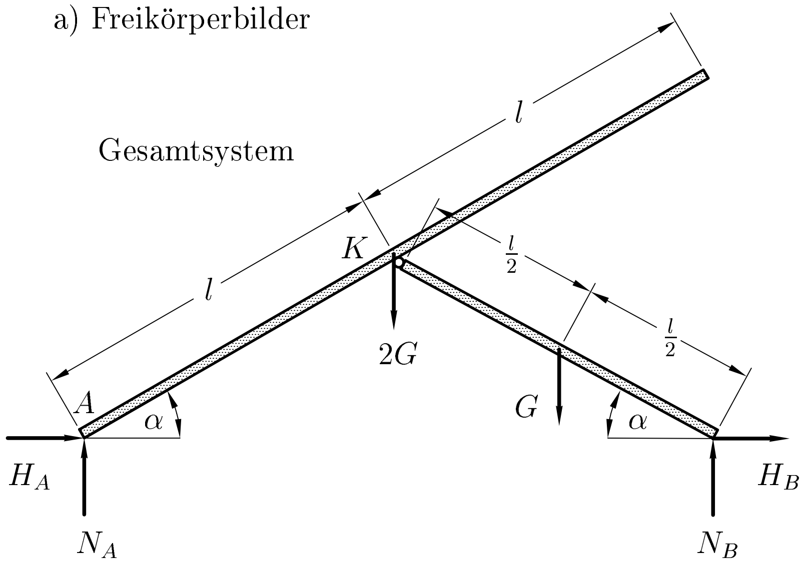
$$\Longrightarrow \qquad M_\varphi = \frac{1}{3}F\, r, (1 - 2\cos\varphi)$$

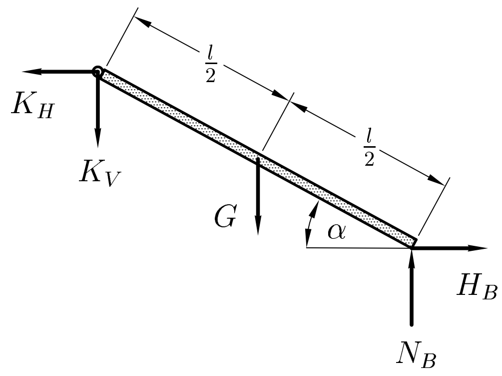
$$\Longrightarrow \qquad M_r = \frac{2}{3}F\, r\, \sin\varphi$$

$$\Longrightarrow \qquad Q_z = \frac{1}{3}F$$

Aufgabe I-2 [20 Punkte]

a) Freikörperbilder





b) Gleichgewichtsbedingungen

$$\rightarrow \;:\quad H_A + H_B = 0$$

$$\uparrow \;:\quad N_A - 3G + N_B = 0$$

$$\overset{\frown}{A} \;:\quad -2Gl\cos\alpha - G\frac{3}{2}l\cos\alpha + N_B 2l\cos\alpha = 0$$

$$\overset{\frown}{K} \;:\quad -G\frac{l}{2}\cos\alpha + N_B l\cos\alpha + H_B l\sin\alpha = 0$$

c) Normal und Haftkräfte

$$\text{aus (3)} \;:\quad N_B = \frac{7}{4}G$$

$$\text{aus (2)} \;:\quad N_A = \frac{5}{4}G$$

$$\text{aus (4)} \;:\quad H_B = -\frac{5}{4}G\cot\alpha$$

$$\text{aus (1)} \;:\quad H_A = \frac{5}{4}G\cot\alpha$$

Haften in A:

$$|H_A| < \mu_0 N_A$$

$$\frac{5}{4}G\cot\alpha < \mu_0\frac{5}{4}G$$

$$\Rightarrow \mu_0 > \cot\alpha$$

Haften in B:

$$|H_B| < \mu_0 N_B$$

$$\frac{5}{4}G\cot\alpha < \mu_0\frac{7}{4}G$$

$$\Rightarrow \mu_0 > \frac{5}{7}\cot\alpha$$

Das größere μ_0 ist maßgeblich.

$$\mu_0 > max\{\cot\alpha, \frac{5}{7}\cot\alpha\} = \cot\alpha$$

Aufgabe I-3 [20 Punkte]

a) Feder in der Ausgangslage spannungsfrei

Potential:

$$U = G\, r_1 \cos\varphi + \frac{c}{2}\, r_2^2\, (1 - \cos\varphi)^2$$

Erste Ableitung des Potentials:

$$\frac{dU}{d\varphi} = -G\, r_1 \sin\varphi + c\, r_2^2\, (1 - \cos\varphi) \sin\varphi = [(c\, r_2^2 - G\, r_1) - c\, r_2^2 \cos\varphi] \sin\varphi$$

Bedingung für Gleichgewichtszustand:

$$\frac{dU}{d\varphi} = 0 \Rightarrow$$

Gleichgewichtslagen:

$$\sin\varphi = 0 \qquad \begin{cases} \varphi_1 = 0 \\ \varphi_3 = \pi \end{cases}$$

oder

$$\cos\varphi = 1 - \frac{G\, r_1}{c\, r_2^2} \qquad \begin{cases} \varphi_2 = \dfrac{\pi}{2} \\ \varphi_4 = \dfrac{3}{2}\,\pi \end{cases}$$

Zweite Ableitung des Potentials:

$$\frac{d^2 U}{d\varphi^2} = -G\, r_1 \cos\varphi + c\, r_2^2\, (\cos\varphi - \cos 2\varphi)$$

Stabilitätsbetrachtung:

$$\left.\begin{array}{llll} \left.\dfrac{d^2 U}{d\varphi^2}\right|_{\varphi_1} & = & -G\, r_1 < 0 & \text{instabil} \\ \left.\dfrac{d^2 U}{d\varphi^2}\right|_{\varphi_2} & = & c\, r_2^2 = G\, r_1 > 0 & \text{stabil} \\ \left.\dfrac{d^2 U}{d\varphi^2}\right|_{\varphi_3} & = & G\, r_1 - 2\, c\, r_2^2 = -G\, r_1 < 0 & \text{instabil} \\ \left.\dfrac{d^2 U}{d\varphi^2}\right|_{\varphi_4} & = & c\, r_2^2 = G\, r_1 > 0 & \text{stabil} \end{array}\right\}$$

b) Feder vorgespannt

Vorspannkraft:

$$F_0 = c\,x_0$$

Potential:

$$U = G\,r_1 \cos\varphi + \frac{c}{2}\,(r_2 - r_2\cos\varphi + x_0)^2$$

Erste Ableitung des Potentials:

$$\frac{dU}{d\varphi} = -G\,r_1 \sin\varphi + c\,r_2\,(r_2 - r_2\cos\varphi + x_0)\sin\varphi$$

Zweite Ableitung des Potentials:

$$\frac{d^2U}{d\varphi^2} = -G\,r_1\cos\varphi + c\,r_2^2\,(\cos\varphi - \cos 2\varphi) + c\,r_2\,x_0\cos\varphi$$

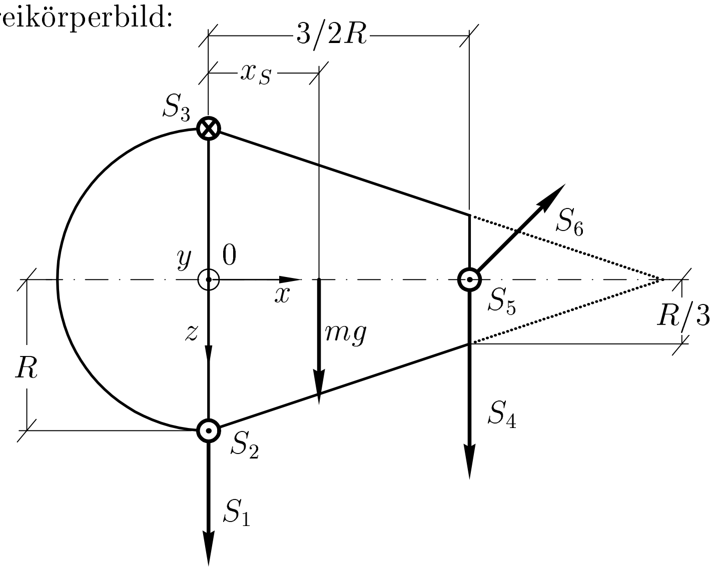
Bedingung für Stabilität in Ursprungsgleichgewichtslage:

$$\left.\frac{d^2U}{d\varphi^2}\right|_{\varphi=0} = -G\,r_1 + c\,r_2\,x_0 > 0$$

$$\Rightarrow F_0 = c\,x_0 > G\,\frac{r_1}{r_2}$$

Aufgabe I-4 [20 Punkte]

Freikörperbild:



Massen und Teilschwerpunktsabstände:

$$\left.\begin{aligned} m_H &= \frac{2}{3}\pi R^3\rho \\ x_{SH} &= -\frac{3}{8}R \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} m_K &= \frac{1}{3}\pi R^2\frac{9}{4}R\rho &&= \frac{3}{4}\pi R^3\rho \\ x_{SK} &= \frac{1}{4}\frac{9}{4}R = \frac{9}{16}R \end{aligned}\right\}$$

$$\begin{aligned} m_S &= \frac{1}{3}\pi\left(\frac{R}{3}\right)^2\left(\frac{1}{3}\frac{9}{4}R\right)\rho &&= \frac{1}{36}\pi R^3\rho \\ x_{SS} &= \frac{3}{4}\frac{9}{4}R = \frac{27}{16}R \\ m &= m_H + m_K - m_S &&= \frac{25}{18}\pi\rho R^3 \end{aligned}$$

Gesamtschwerpunkt:

$$\begin{aligned} x_S &= \frac{x_{SH}\,m_H + x_{SK}\,m_K - x_{SS}\,m_S}{m_H + m_K - m_S} \\ &= \frac{\rho\Big[\Big(-\frac{3}{8}R\Big)\frac{2}{3}\pi R^3 + \Big(\frac{9}{16}R\Big)\frac{3}{4}\pi R^3 - \Big(\frac{27}{16}R\Big)\frac{1}{36}\pi R^3\Big]}{\pi\rho R^3(\frac{2}{3}+\frac{3}{4}-\frac{1}{36})} \\ &= \frac{9}{100}R \end{aligned}$$

Kräfte- und Momentengleichgewichte:

$$\begin{aligned}
\sum F_x &: \quad 0 = \frac{\sqrt{2}}{2}S_6 && (1)\\
\sum F_y &: \quad 0 = S_2 - S_3 + S_5 && (2)\\
\sum F_z &: \quad 0 = S_1 + S_4 - \frac{\sqrt{2}}{2}S_6 + mg && (3)\\
\sum M_x^0 &: \quad 0 = -S_4\left(\frac{R}{3}\right) - S_3R - S_2R && (4)\\
\sum M_y^0 &: \quad 0 = -S_4\frac{3}{2}R + \frac{\sqrt{2}}{2}S_6\frac{3}{2}R - mx_Sg && (5)\\
\sum M_z^0 &: \quad 0 = S_5\frac{3}{2}R && (6)
\end{aligned}$$

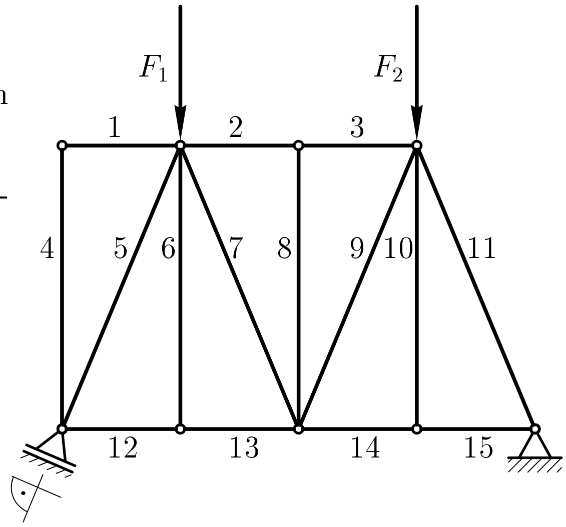
Auflösung:

$$\left.\begin{aligned}
(1): \quad S_6 &= 0\\
(6): \quad S_5 &= 0\\
(5): \quad S_4 &= -\frac{mx_S}{3R}2g = \left(-\frac{1}{12}\pi R^3\rho g\right)\\
(2): \quad S_2 &= S_3\\
(4): \quad S_2 &= S_3 = -\frac{S_4}{6} = \frac{mx_S}{9R}g = \left(\frac{1}{72}\pi R^3\rho g\right)\\
(3): \quad S_1 &= -S_4 - mg = mg\frac{2x_S}{3R}\left(1 - \frac{3R}{2x_S}\right) = \left(-\frac{47}{36}\pi R^3\rho g\right)
\end{aligned}\right\}$$

Aufgabe I-K1 [4 Punkte]

Ein Fachwerk wird durch die beiden Kräfte F_1 und F_2 belastet.

Geben Sie die in dem Fachwerk auftretenden Nullstäbe an.

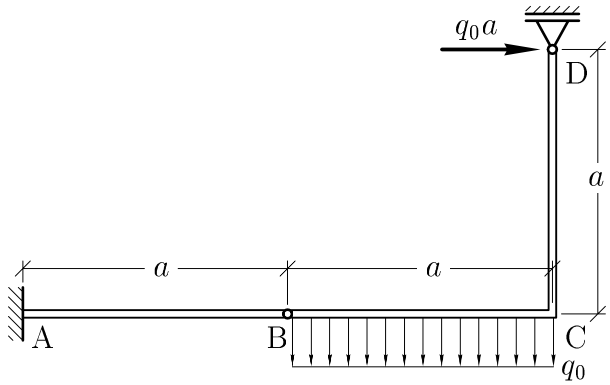


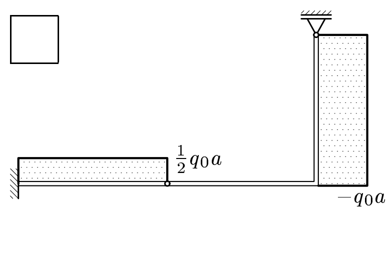
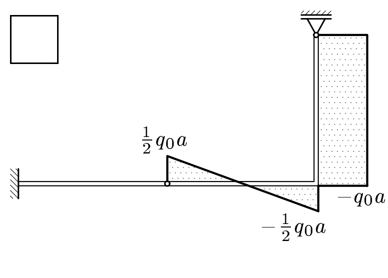
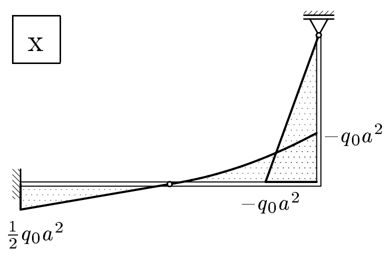
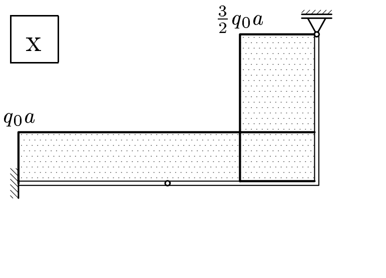
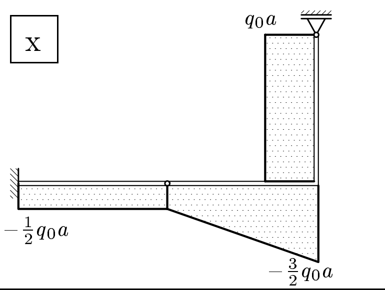
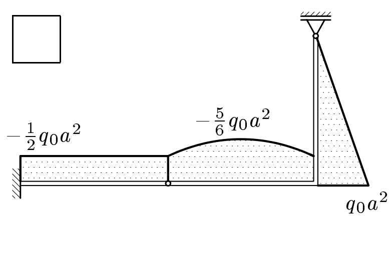
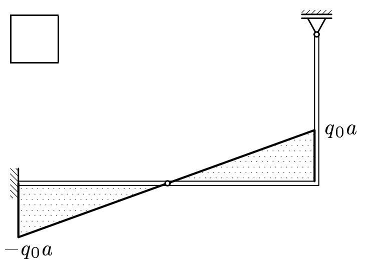
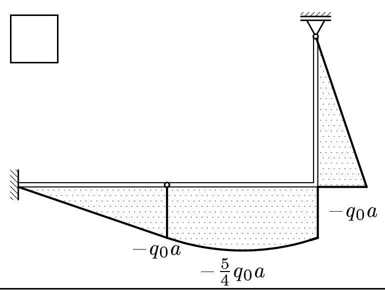
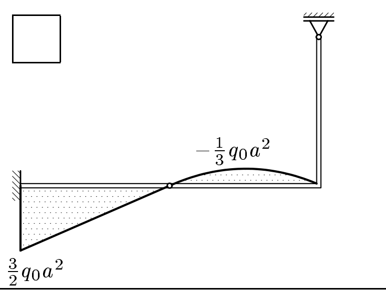
Nullstäbe sind: 1,4,6,8,10,12,13

Aufgabe I-K2 [6 Punkte]

Ein abgewinkelter Träger wird im Abschnitt BC mit der konstanten Streckenlast q_0 sowie am Lager D mit der Kraft $q_0 a$ belastet.

Kennzeichnen Sie die zum gegebenen Belastungsfall gehörigen Schnittgrößenverläufe.



Normalkraft	Querkraft	Biegemoment
		x 
x 	x 	
		

Aufgabe I-K3 [3 Punkte]

Kreuzen Sie die Einheiten an, die zu den in der Tabelle angegebenen Größen gehören.

	Nm	N	dimensionslos	keine davon
Kraft F		x		
Moment M	x			
Potential $\Pi = U$	x			
Haftungskoeffizient μ_0			x	
Arbeit W	x			
Streckenlast q				x

Aufgabe I-K4 [5 Punkte]

$$\vec{M}^{(0)} = \vec{r} \times \vec{F}$$

a) Ortsvektor:

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 10 \end{pmatrix} \text{ m}$$

b) Kraftvektor:

$$\vec{F} = |\vec{F}|\, \vec{e}_F = |\vec{F}| \frac{1}{\sqrt{9+4+100}} \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -10 \end{pmatrix} = \frac{10}{\sqrt{113}} \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -10 \end{pmatrix} \text{ kN}$$

c) Moment bezüglich des Punktes O:

$$\vec{M}^{(O)} = \frac{10}{\sqrt{113}} \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 10 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -10 \end{pmatrix} \right] \text{ kNm} = \frac{10}{\sqrt{113}} \begin{pmatrix} -30 \\ 30 \\ -15 \end{pmatrix} \text{ kNm}$$