INSTITUT FÜR MECHANIK	Technische Universität Darmstadt
Prof. W. Becker Prof. D. Gross Prof. P. Hagedorn Jun. Prof. R. Müller	**Prüfung** **Technische Mechanik I** am 25. Juli 2005

(Name) (Vorname) (Matr.-Nr.) (Studiengang)

(Platznummer)

Einverständniserklärung:
Ich stimme hiermit zu, dass meine Prüfungsergebnisse zusammen mit meiner Matrikelnummer (ohne Namen) im Internet eingesehen werden können.

Darmstadt, 25.07.2005

(Unterschrift)

Die Aufgaben sind nicht nach ihrem Schwierigkeitsgrad geordnet. Bitte beginnen Sie für jede Aufgabe ein neues Blatt und numerieren Sie die Blätter. Der Lösungsweg soll klar erkennbar sein, die Ergebnisse müssen deutlich hervorgehoben werden. Bei den durch K gekennzeichneten Kurzfragen sind lediglich Ergebnisse einzutragen.

Es ist erlaubt, eine handgeschriebene Formelsammlung im Umfang eines beidseitig beschriebenen DIN A4-Blattes zu benutzen. Andere Hilfsmittel sind nicht erlaubt. Es wird ausdrücklich darauf hingewiesen, dass keinerlei elektronische Hilfsmittel benutzt werden dürfen. Hierzu zählen insbesondere Taschenrechner, Laptops und Handys.

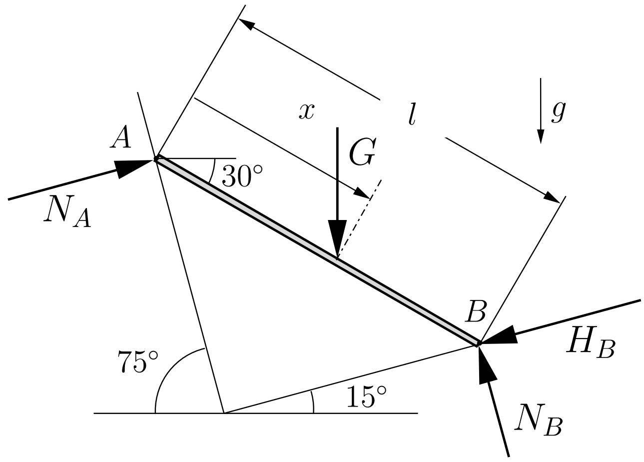
Viel Erfolg !

Aufgabe	1	2	3	4	K1	K2	K3	K4	$\sum$	Note
max. Punkte	20	19	24	24	4	3	3	3	100	
erreichte Punkte										
Hand-zeichen										

Aufgabe 1 [20 Punkte]

zu a)

Freikörperbild:



Gleichgewichtsbedingungen:

$$\rightarrow: \quad N_A \cos 15° - H_B \cos 15° - N_B \sin 15° = 0 \tag{1}$$

$$\uparrow: \quad N_A \sin 15° - H_B \sin 15° + N_B \cos 15° - G = 0 \tag{2}$$

$$\curvearrowleft B: \quad -Al\tfrac{1}{2}\sqrt{2} + G(l-x)\cos 30° = 0 \tag{3}$$

Aus Gleichung (3) folgt:

$$N_A = \frac{1}{2}\sqrt{6}G\left(\frac{l-x}{l}\right) \tag{4}$$

Gleichung (1) mit $\sin 15°$ und Gleichung (2) mit $\cos 15°$ und dann voneinander subtrahiert ergibt sofort:

$$N_B = G\cos 15° = \frac{1}{4}\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)G \tag{5}$$

Gleichung (4) und Gleichung (5) in (1) einsetzen ergibt:

$$\begin{aligned} H_B &= A - G\sin 15° \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{6}\left(\frac{l-x}{l}\right)G - \frac{1}{4}\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)G \\ &= \frac{1}{4}\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)G - \frac{1}{2}\sqrt{6}\left(\frac{x}{l}\right)G \end{aligned} \tag{6}$$

zu b)

Grenzhaftung:

$$|H_B| = \mu_0 N_B \tag{7}$$

Fall 1: $$H_B = \mu_0 N_B \tag{8}$$
Fall 2: $$H_B = -\mu_0 N_B \tag{9}$$

Einsetzen von (5) und (6) in (8) und (9):

$$\pm\frac{1}{4}\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)G \mp \frac{1}{2}\sqrt{6}\left(\frac{x_{1,2}}{l}\right)G = \mu_0\frac{1}{4}\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)G \tag{10}$$

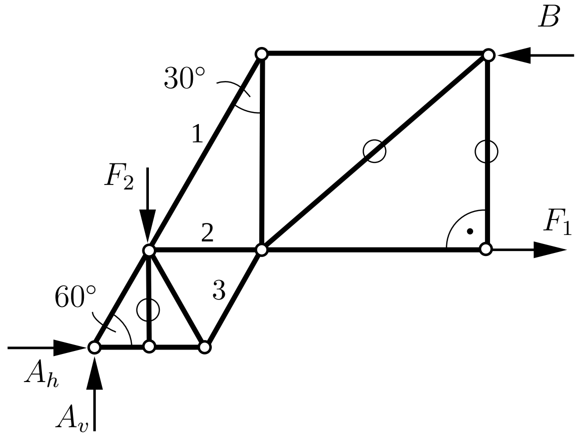
Auflösen nach $x_{1,2}$:

$$x_{1,2} = (1 \mp \mu_0)\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\sqrt{3}\right)l \tag{11}$$

Für $\mu_0 = 0.5$ ergibt sich dann der folgende Bereich, in dem sich der Student aufhalten darf:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\sqrt{3}\right) \leq x \leq \frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\sqrt{3}\right) \tag{12}$$

Aufgabe 2 [19 Punkte]



(a)

(b)
Kräftegleichgewicht:

$$\sum F_{ix} = 0 = A_h + F_1 - B \tag{13}$$
$$\sum F_{iy} = 0 = A_v - F_2 \tag{14}$$

Momentengleichgewicht:

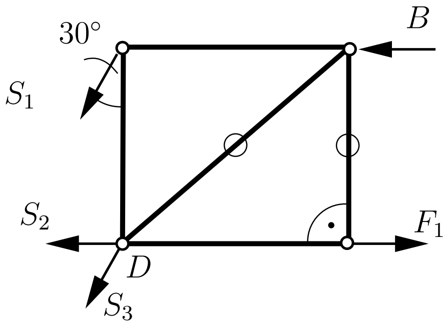
$$\sum M^A = 0 = \frac{\sqrt{3}}{2}aF_1 + \frac{a}{2}F_2 - (\sqrt{3} + \frac{\sqrt{3}}{2})aB \tag{15}$$

Aus (14) und (15) folgen direkt A_v und B . Einsetzen in (13) liefert A_h:

$$A_v = F_2 \tag{16}$$
$$A_h = \frac{1}{3\sqrt{3}}F_2 - \frac{2}{3}F_1 \tag{17}$$
$$B = \frac{1}{3\sqrt{3}}F_2 + \frac{1}{3}F_1 \tag{18}$$

(c)
Die Ermittlung der Stabkräfte kann auf verschiedenen Wegen erfolgen. (Hier Ermittlung durch Ritterschnitt)

noch (c)
Ermittlung der Stabkräfte durch das Rittersche Schnittverfahren.



<u>Kräftegleichgewicht:</u>

$$\sum F_{ix} = 0 \; = \; S_2 + S_1 \sin 30° + S_3 \sin 30° + B - F_1 \tag{19}$$

$$\sum F_{iy} = 0 \; = \; S_1 \cos 30° + S_3 \cos 30° \tag{20}$$

Aus (20) folgt direkt $S_1 = -S_3$.

<u>Momentengleichgewicht:</u>

$$\sum M^D = 0 \; = \; \sqrt{3}aB + \sqrt{3}aS_1 \sin 30° \tag{21}$$

Aus (21) erhält man $S_1 = -2B$.

Die Stabkräfte ergeben sich damit zu:

$$S_1 \;=\; -\frac{2}{3\sqrt{3}}F_2 - \frac{2}{3}F_1 \tag{22}$$

$$S_2 \;=\; -\frac{1}{3\sqrt{3}}F_2 + \frac{2}{3}F_1 \tag{23}$$

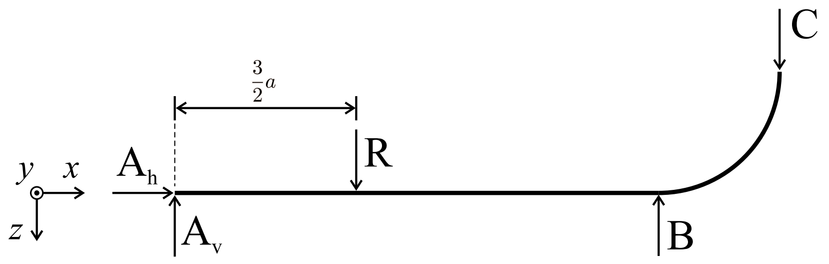
$$S_3 \;=\; \frac{2}{3\sqrt{3}}F_2 + \frac{2}{3}F_1 \tag{24}$$

Aufgabe 3 [24 Punkte]

a) Resultierende:

$$R = \int_0^{3a} q_0 \sin\left(\frac{\pi x}{3a}\right) \mathrm{d}x = -3\frac{q_0 a}{\pi}\left[\cos\left(\frac{\pi x}{3a}\right)\right]_0^{3a} = 6\frac{q_0 a}{\pi}$$

Gesamtsystem:

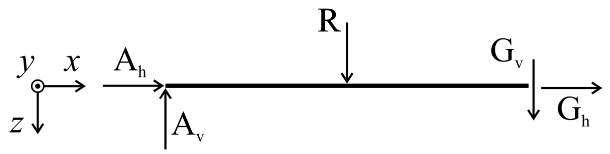


$$\Sigma \rightarrow: A_h = 0$$

$$\Sigma \uparrow: A_v - 6\frac{q_0 a}{\pi} + B - C = 0$$

$$\Sigma M_A \curvearrowright: 9\frac{q_0 a^2}{\pi} - B4a + C5a = 0$$

Teilsystem I:



$$\Sigma \rightarrow: A_h + G_h = 0$$

$$\Sigma \uparrow: A_v - 6\frac{q_0 a}{\pi} - G_v = 0$$

$$\Sigma M_G \curvearrowright: A_v 3a - 9\frac{q_0 a^2}{\pi} = 0$$

Ergebnisse:

$$A_h = 0$$

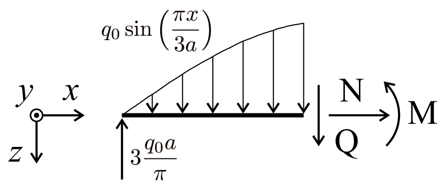
$$A_v = 3\frac{q_0 a}{\pi}$$

$$B = 6\frac{q_0 a}{\pi}$$

$$C = 3\frac{q_0 a}{\pi}$$

$$G_h = 0$$

$$G_v = -3\frac{q_0 a}{\pi}$$



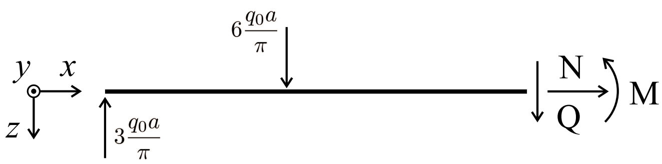
b) Bereich I: $0 \leq x \leq 3a$

$$N(x) = 0$$

$$Q(x) = 3\frac{q_0 a}{\pi} - \int_0^x q_0 \sin\left(\frac{\pi \bar{x}}{3a}\right) \mathrm{d}\bar{x} = 3\frac{q_0 a}{\pi} + 3\frac{q_0 a}{\pi}\left[\cos\left(\frac{\pi \bar{x}}{3a}\right)\right]_0^x = 3\frac{q_0 a}{\pi}\cos\left(\frac{\pi x}{3a}\right)$$

$$M(x) = 9\frac{q_0 a^2}{\pi^2}\sin\left(\frac{\pi x}{3a}\right)$$

Bereich II: $3a \leq x \leq 4a$

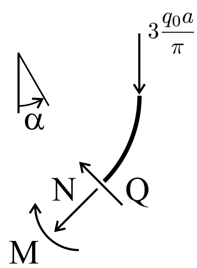


$$N(x) = 0$$

$$Q(x) = 3\frac{q_0 a}{\pi} - 6\frac{q_0 a}{\pi} = -3\frac{q_0 a}{\pi}$$

$$M(x) = -3\frac{q_0 a}{\pi}x + 9\frac{q_0 a^2}{\pi} = 3\frac{q_0 a}{\pi}(3a - x)$$

Bereich III: $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$



$$N(x) = -3\frac{q_0 a}{\pi}\sin\alpha$$

$$Q(x) = 3\frac{q_0 a}{\pi}\cos\alpha$$

$$M(x) = -3\frac{q_0 a^2}{\pi}\cos\alpha$$

Aufgabe 4 [24 Punkte]

zu a)

Länge der Feder in der entspannten Lage $\varphi_0 = \frac{\pi}{2}$: $l_0 = \sqrt{2}r$

Länge der Feder in Lage φ:

$$\cos\frac{\varphi}{2} = \frac{l}{2r}$$

$$\Rightarrow l = 2r\cos\frac{\varphi}{2}$$

Federverlängerung:

$$\begin{aligned} \Delta l &= l - l_0 \\ \Delta l &= 2r\cos\frac{\varphi}{2} - \sqrt{2}r \end{aligned}$$

Potential

$$\begin{aligned} \Pi &= \frac{1}{2}c\left(\Delta l\right)^2 - Gr\cos\varphi \quad + \\ &= \frac{1}{2}c\left(2r\cos\frac{\varphi}{2} - \sqrt{2}r\right)^2 - Gr\cos\varphi \\ \Pi &= \frac{1}{2}cr^2\left(2\cos\frac{\varphi}{2} - \sqrt{2}\right)^2 - Gr\cos\varphi \end{aligned}$$

zu b)

Ableitung des Potentials:

$$\begin{aligned} \Pi'(\varphi) &= -cr^2\left(2\cos\frac{\varphi}{2} - \sqrt{2}\right)\sin\frac{\varphi}{2} + Gr\sin\varphi \\ &= -cr^2\left(2\cos\frac{\varphi}{2} - \sqrt{2}\right)\sin\frac{\varphi}{2} + 2Gr\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2} \\ &= \sin\frac{\varphi}{2}\left(2Gr\cos\frac{\varphi}{2} - cr^2\left(2\cos\frac{\varphi}{2} - \sqrt{2}\right)\right) \\ \Pi'(\varphi) &= \sin\frac{\varphi}{2}\left(\left(2Gr - 2cr^2\right)\cos\frac{\varphi}{2} + \sqrt{2}cr^2\right) \end{aligned}$$

Gleichgewichtslagen:

(I)

$$\sin\frac{\varphi}{2} \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow \varphi_I = 0$$

(II) oder

$$\left(2Gr - 2cr^2\right)\cos\frac{\varphi}{2} + \sqrt{2}cr^2 \overset{!}{=} 0 \Rightarrow \cos\frac{\varphi_{II}}{2} = \frac{\sqrt{2}cr^2}{2\left(c^2 - Gr\right)}$$

c)

Speziell mit $G = 2cr\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$:

$$\cos\frac{\varphi_{II}}{2} = -1 \Rightarrow \varphi_{II} = 2\pi \hat{=} \varphi_I$$

2. Ableitung des Potentials:

$$\begin{aligned}
\Pi'(\varphi) &= -cr^2\left(2\cos\frac{\varphi}{2} - \sqrt{2}\right)\sin\frac{\varphi}{2} + Gr\sin\varphi \\
\Pi'(\varphi) &= -2cr^2\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2} + \sqrt{2}cr^2\sin\frac{\varphi}{2} + Gr\sin\varphi \\
\Rightarrow \Pi''(\varphi) &= -2cr^2\frac{1}{2}\left(\cos^2\frac{\varphi}{2} - \sin^2\frac{\varphi}{2}\right) + \frac{\sqrt{2}}{2}cr^2\cos\frac{\varphi}{2} + Gr\cos\varphi
\end{aligned}$$

Stabilität der Gleichgewichtslage $\varphi_I = \varphi_{II} = 0$:

$$\Pi''(\varphi = 0) = cr^2\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) > 0 \quad \text{stabil}$$