NICHT umblättern!

(Dies zählt als Täuschungsversuch)

Hinweise zur Prüfung Technische Mechanik II

- Sollten Sie aus gesundheitlichen Gründen nicht in der Lage sein an der Prüfung teilzunehmen, müssen Sie jetzt den Saal verlassen und umgehend das Studierendenbüro darüber unterrichten.
- Fragen sind nur zur Aufgabenstellung zulässig, nicht jedoch zum Lösungsweg.
- Die Bearbeitungszeit beträgt 90 Minuten.
- Die Klausur ist mit nichtradierbarem, dokumentenechtem Stift zu bearbeiten.
- Schreiben Sie NICHT in rot oder grün (Korrekturfarben).
- Schreiben Sie auf eigene Blätter.
- Schreiben Sie Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer auf jedes Ihrer Blätter sowie das Deckblatt.
- Beginnen Sie für jede Aufgabe ein neues Blatt.
- Die Reihenfolge der Aufgaben ist zufällig und nicht nach dem Schwierigkeitsgrad geordnet.
- Es gelten die Bestimmungen der Prüfungsordnung der TU Darmstadt bezüglich Betrug und Täuschung. Schon der Täuschungsversuch führt zur vorzeitigen Beendigung der Prüfung und die Klausur wird eingezogen.
- Zulässige Hilfsmittel sind:
  - eine Formelsammlung im Umfang von zwei beidseitig handbeschriebenen DIN A4-Blättern (nicht gedruckt/kopiert, keine Beispielaufgaben),
  - ein Taschenrechner.
  - Weitere Hilfsmittel, insbesondere Handys, Smartwatches und Laptops, sind nicht erlaubt.
  - Die Hilfsblätter zur TM II (Schwerpunkt, Flächenträgheitsmomente, Biegelinie, Torsion, Integrale) sind auf den letzten Seiten der Klausur zu finden.
- Legen Sie Ihren Studierendenausweis und behördlichen Lichtbildausweis (z.B. Personalausweis, Reisepass...) an den freien Platz rechts neben sich bereit.
- Legen Sie bearbeitete Blätter nur vor sich oder unmittelbar neben sich auf den Tisch.
- Handys sind auszuschalten und dürfen nicht am Körper getragen werden.
- Toilettengänge sind einzeln nach Abmeldung bei der Aufsicht gestattet.
- Bleiben Sie nach der Prüfung sitzen, bis Sie zum Gehen aufgefordert werden. Die Prüfung und alle Ihre Lösungen lassen Sie am Platz liegen.
- Wir wünschen viel Erfolg!

NICHT umblättern!

Prüfung - Technische Mechanik II (BI)

SoSe 2023

28. Juli 2023

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

FB 13, Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. Dominik Schillinger

Name, Vorname: ______________________________

Matrikelnummer: ______________________________

Studiengang: ______________________________

Die Aufgaben sind nicht nach ihrem Schwierigkeitsgrad geordnet. Bitte beginnen Sie für jede Aufgabe ein neues Blatt und nummerieren Sie die Blätter. Die Bearbeitungszeit beträgt 90 Minuten. Der Lösungsweg muss klar erkennbar sein, die Ergebnisse müssen deutlich hervorgehoben werden. Bei den Kurzfragen wird lediglich das auf den hierfür vorgesehenen Arbeitsblättern eingetragene Ergebnis gewertet.

Es ist erlaubt, eine handgeschriebene Formelsammlung im Umfang von zwei beidseitig beschriebenen DIN A4-Blättern sowie einen Taschenrechner zu benutzen. Andere Hilfsmittel sind nicht erlaubt. Es wird ausdrücklich darauf hingewiesen, dass keinerlei elektronische Hilfsmittel benutzt werden dürfen. Hierzu zählen insbesondere Taschenrechner, Laptops und Handys.

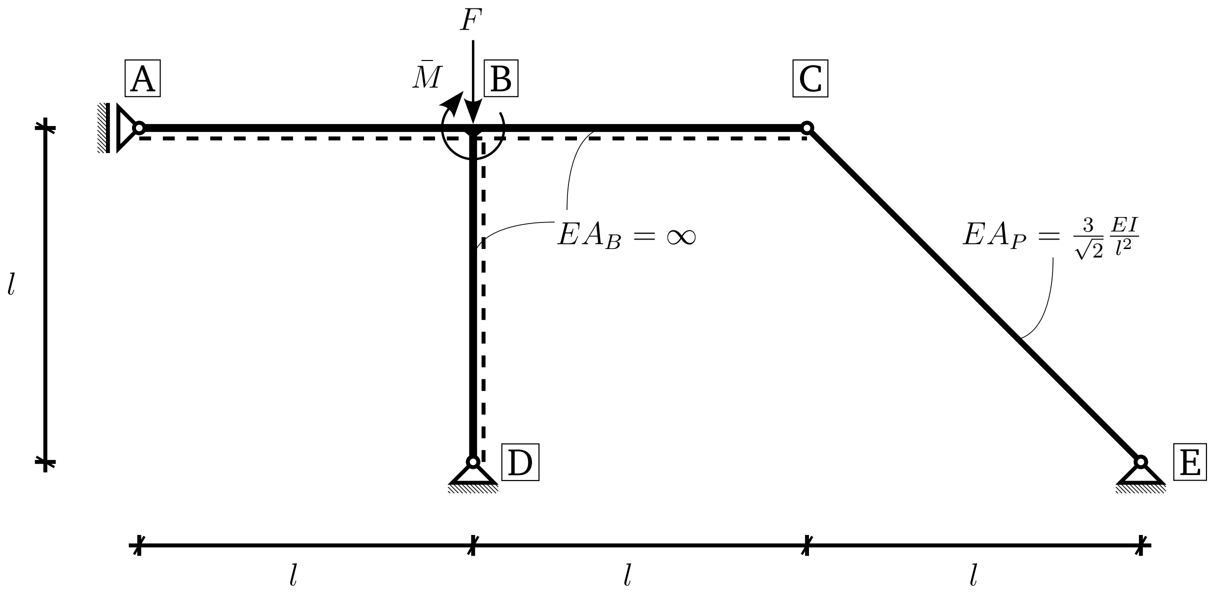
Viel Erfolg!

Aufgabe	1	2	3	K1	K2	K3	K4	K5	K6	K7	$\sum$	Note
max. Punkte	22	20	15	5	7	3	4	2	5	7	90	
erreichte Punkte												
Handzeichen												

	1. Prüfer	2. Prüfer	Prüfungskommissions-vorsitzender [1]
Name	Prof. Dr.-Ing. D. Schillinger	Prof. Dr.-Ing. R. Müller	Prof. Dr.-Ing. A. Eichhorn
Korrekturfarbe			
Bewertung			
Unterschrift			

[1] Nach § 26 Abs. 1 S. 3 Allgemeine Prüfungsbestimmungen der TU Darmstadt (APB) legt die Prüfungskommission die endgültige Bewertung fest, falls die Bewertungen der beiden Prüfenden mehr als 0,7 Notenwerte voneinander abweichen.

Aufgabe 1 [22 Punkte]



Die dargestellte dehn- und schubstarre Rahmenkonstruktion mit konstanter Biegesteifigkeit EI ist zusätzlich im Punkt $\boxed{\text{C}}$ durch eine Pendelstütze gelagert, welche eine konstante Dehnsteifigkeit $EA_P = \frac{3}{\sqrt{2}}\frac{EI}{l^2}$ besitzt. Das Tragwerk wird durch eine Einzelkraft F und ein Einzelmoment $\bar{M}$ belastet.

a) Berechnen Sie die Stabkraft S der Pendelstütze.

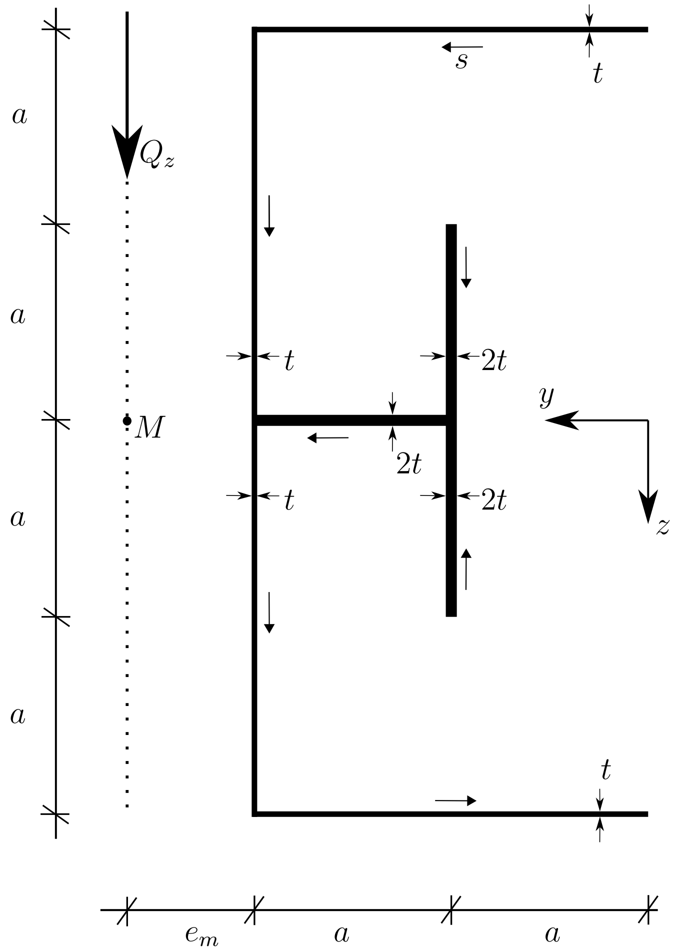
b) Zeichnen Sie die resultierende Momentenlinie mit Angabe der Vorzeichen. Geben Sie für jeden Abschnitt die ausgezeichneten Werte an den Knoten $\boxed{\text{A}}$ bis $\boxed{\text{E}}$ sowie für jeden Abschnitt die Art des Verlaufs (konstant, linear, quadratisch,...) an.

c) Berechnen Sie die Längenänderung der Pendelstütze.

Abschnitte, in denen die entsprechende Schnittgröße null ist, müssen explizit gekennzeichnet werden (z. B. durch Eintragen einer Null).

Gegeben: l, F, $\bar{M}$, $EI =$ konstant, $EA_B = \infty$, $EA_P = \frac{3}{\sqrt{2}}\frac{EI}{l^2}$, $GA_S = \infty$

Aufgabe 2 [20 Punkte]



Der abgebildete dünnwandige, offene Querschnitt wird durch die Querkraft Q_z belastet, deren Wirkungslinie durch den Schubmittelpunkt M verläuft.

a) Zeichnen Sie

- den $z \cdot t$ -Verlauf,
- den S_y-Verlauf und
- den τ-Verlauf

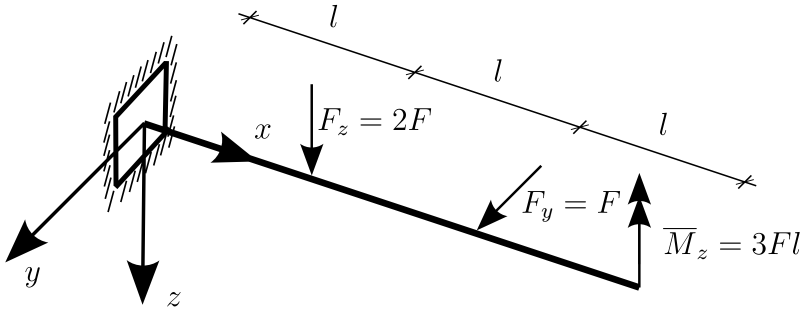
in die dafür vorgesehenen Abbildungen auf der nächsten Seite ein und geben Sie ausgezeichnete Werte sowie Vorzeichen und Richtung der Schubspannung an. Beachten Sie die vorgegebene Integrationsrichtung s.

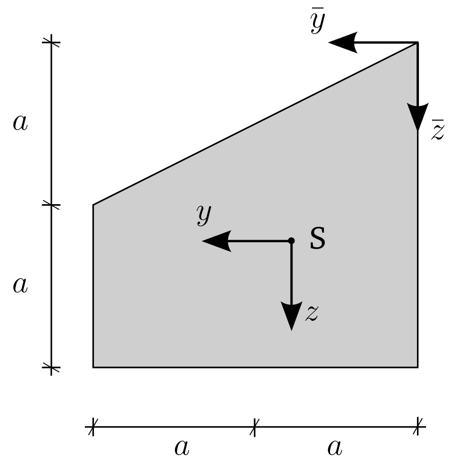
Nehmen Sie für Aufgabenteil a) das Flächenträgheitsmoment I_y als gegeben an.

b) Berechnen Sie den Abstand e_m des Schubmittelpunktes M zum Profil. Nehmen Sie für Aufgabenteil b) das Flächenträgheitsmoment $I_y = \frac{68}{3}a^3t$ an.

Gegeben: $Q_z, a, t\,(t \ll a)$; außerdem für a) I_y und für b) $I_y = \frac{68}{3}a^3t$

Aufgabe 3 [15 Punkte]





Der einseitig eingespannte Balken hat den dargestellten Querschnitt und ist durch zwei Einzellasten $F_y = F$ und $F_z = 2F$ und ein Moment $\overline{M}_z = 3Fl$ belastet. Die Wirkungslinien der Einzellasten verlaufen durch den Schwerpunkt des Querschnitts.

a) Bestimmen Sie die Flächenträgheitsmomente I_y, I_z und I_{yz} der Querschnittsfläche.

b) Skizzieren Sie die Verläufe der Schnittgrößen M_y und M_z des Systems unter Angabe der ausgezeichneten Werte und deren Vorzeichen.

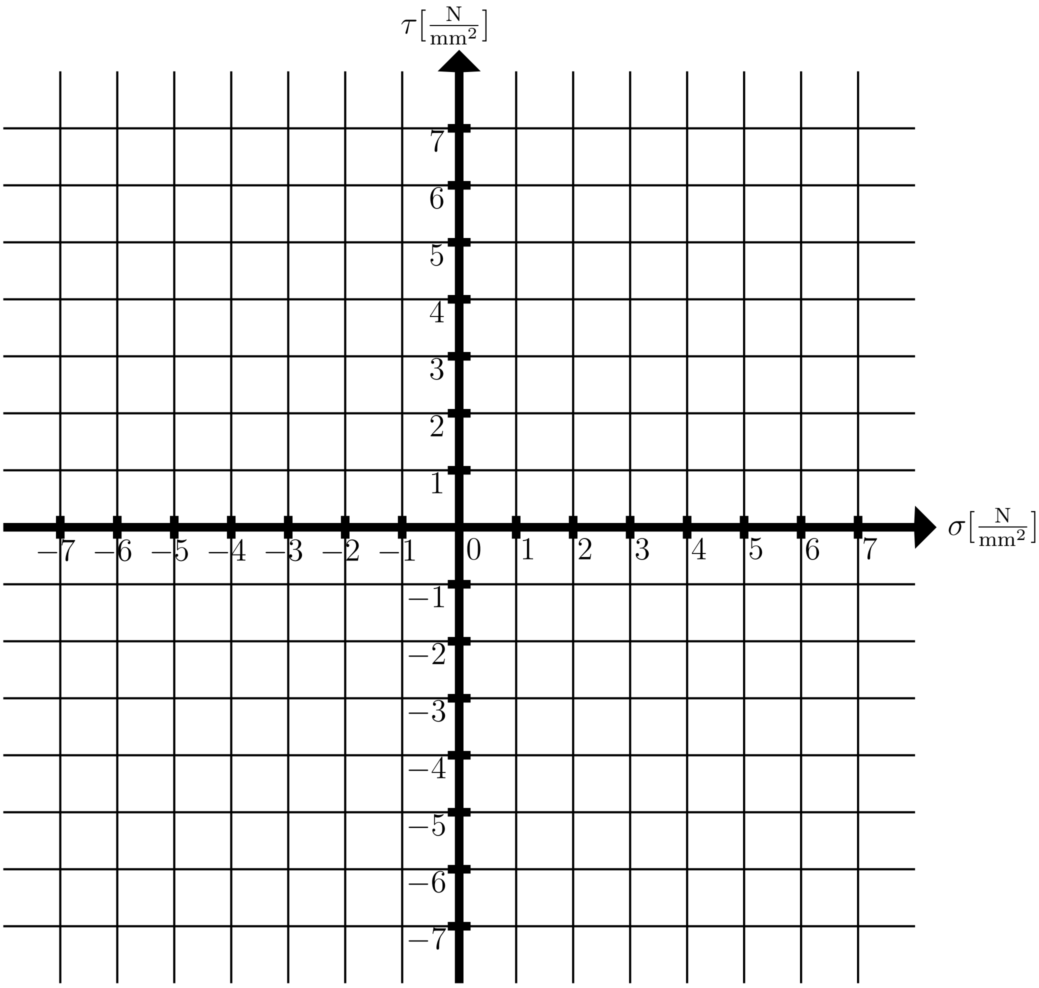
c) Geben Sie die Normalspannung σ_x an der Einspannstelle in Abhängigkeit von den Koordinaten y und z an.

Gegeben: l, a, $F_y = F$, $F_z = 2F$, $\overline{M}_z = 3Fl$

Kurzfrage 1 [5 Punkte]

Skizzieren Sie den Mohrschen Spannungskreis für den durch σ gegebenen Spannungszustand in das folgende σ, τ-Koordinatensystem und bestimmen Sie die mittlere Normalspannung σ_M, die Hauptnormalspannungen $\sigma_{1,2}$ sowie die maximale Schubspannung $\tau_{\max}$ und tragen Sie Ihre Ergebnisse mit Einheiten in die dafür vorgesehenen Kästchen ein.

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{pmatrix} \text{ mit } \sigma_x = 3\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm}^2},\ \sigma_y = -2\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm}^2},\ \tau_{xy} = 6\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm}^2},$$



$\sigma_M =$

$\tau_{\max} =$

$\sigma_1 =$

$\sigma_2 =$

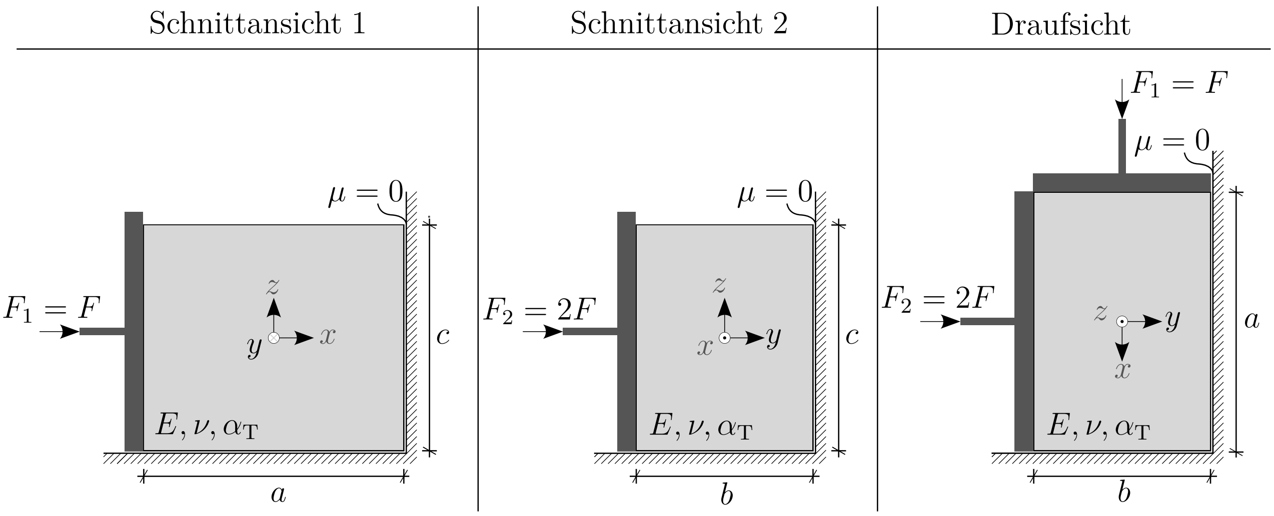
Kurzfrage 2 [7 Punkte]

Ein gewichtsloser Quader (Breite a, Tiefe b, Höhe c, Elastizitätsmodul E, Querkontraktionszahl ν, Wärmeausdehnungskoeffizient α_T) liegt in der Ecke eines Raumes, dessen Wände und Boden als starr und glatt (Reibkoeffizient $\mu = 0$) angenommen werden können. Im dargestellten Zustand ist der Quader spannungsfrei. Zunächst wird der Quader über zwei Stempel mit Hilfe der Kräfte $F_1 = F$ in x-Richtung und $F_2 = 2F$ in y-Richtung zusammengedrückt.

a) Geben Sie die Normalspannungen σ_x, σ_y, σ_z, die Dehnungen ε_x, ε_y und ε_z sowie die Breitenänderung Δa in x-Richtung, die Tiefenänderung Δb in y-Richtung und die Höhenänderung Δc in z-Richtung im verformten Zustand in den dafür vorgesehenen Kästchen an.

b) Zusätzlich zur Belastung durch die Kräfte F_1 und F_2 wird die Temperatur des Quaders jetzt noch um die Temperaturdifferenz ΔT verändert. Berechnen Sie, wie groß ΔT sein muss, sodass die Höhe des Quaders im Vergleich zum Ausgangszustand unverändert ist ($\Delta c = 0$). Tragen Sie Ihr Ergebnis in das dafür vorgesehene Kästchen ein.

Gegeben: $a,\ b,\ c,\ E,\ \nu,\ \alpha_\mathrm{T},\ F,\ F_1 = F,\ F_2 = 2F,\ \mu = 0$



$\sigma_x =$

$\varepsilon_x =$

$\Delta a =$

$\sigma_y =$

$\varepsilon_y =$

$\Delta b =$

$\sigma_z =$

$\varepsilon_z =$

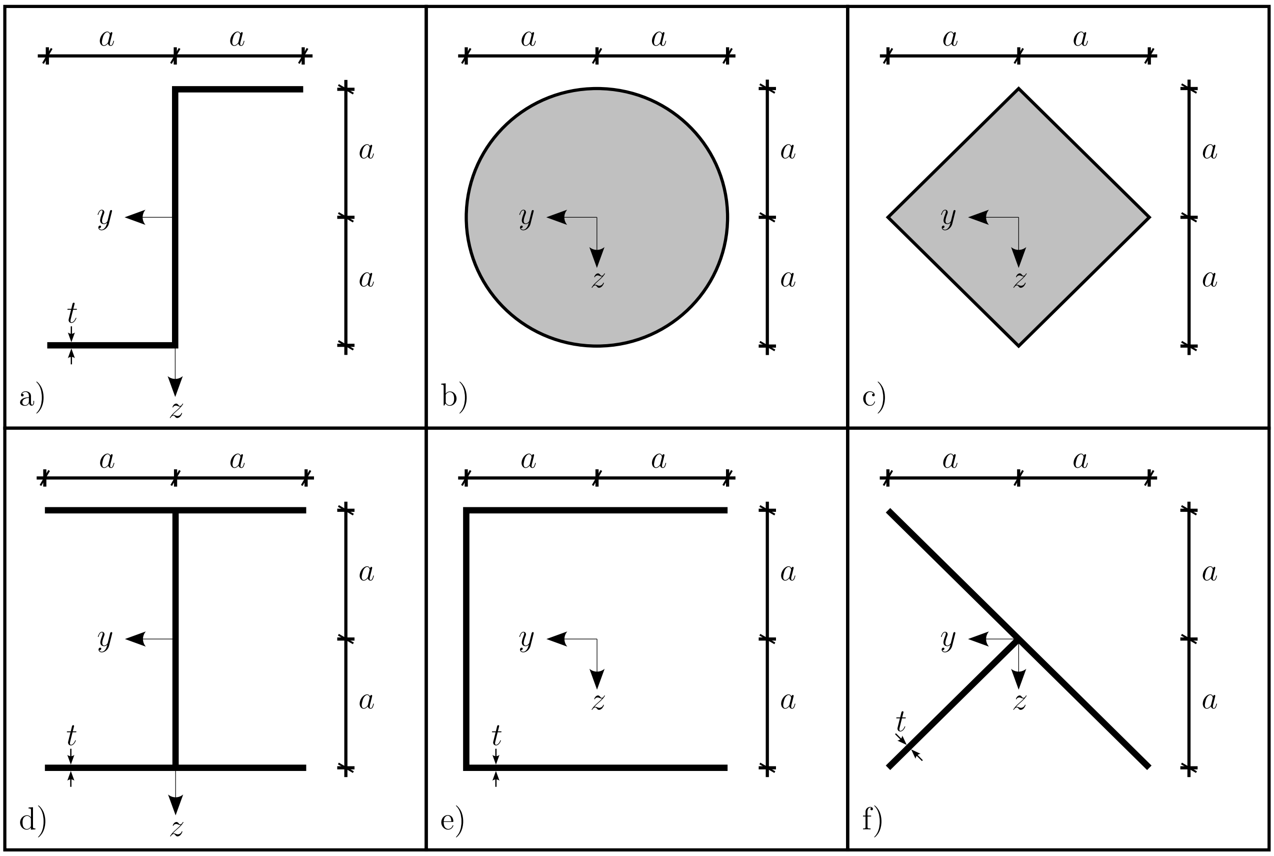
$\Delta c =$

$\Delta T =$

Kurzfrage 3 [3 Punkte]

Gegeben sind die folgenden 6 Querschnitte. Ist eine Wanddicke t angegeben, so handelt es sich um einen dünnwandigen Querschnitt ($t \ll a$). Kreuzen Sie in der unten stehenden Tabelle für die Querschnitte a) bis f) an, ob das Flächendeviationsmoment I_{yz} bezüglich der gegebenen y, z-Koordinatensysteme 0 oder von 0 verschieden ist. Aufgabenteile, in denen nicht genau eine Option angekreuzt wird, werden mit 0 Punkten bewertet.

Gegeben: $a,\ t\ (t \ll a)$

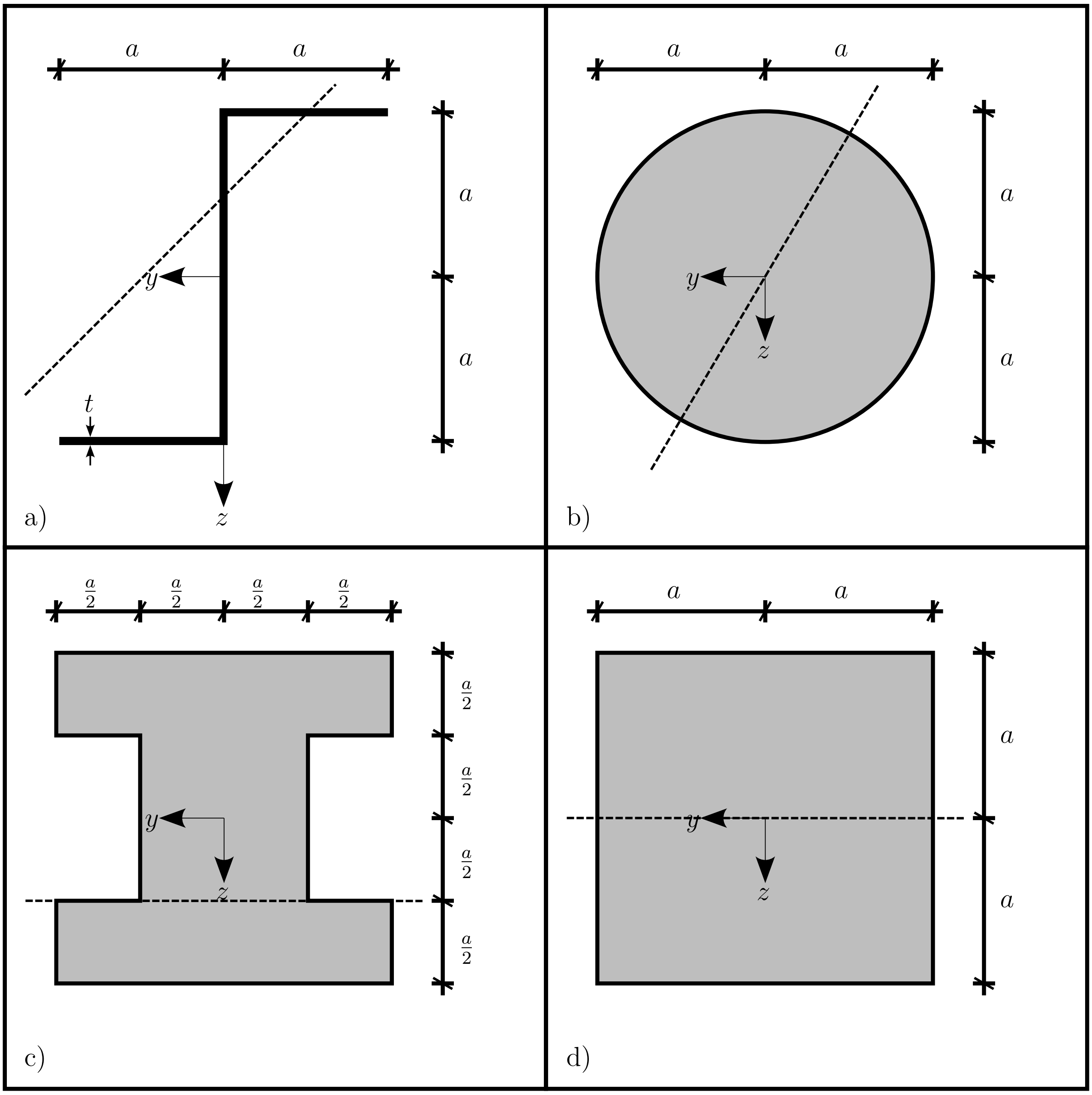


	$I_{yz} = 0$	$I_{yz} \neq 0$
a)		
b)		
c)		
d)		
e)		
f)		

Kurzfrage 4 [4 Punkte]

Gegeben sind die folgenden 4 Querschnitte. Ist eine Wanddicke t angegeben, so handelt es sich um einen dünnwandigen Querschnitt ($t \ll a$). In jedem der Querschnitte herrscht eine lineare Normalspannungsverteilung. Die Nulllinien dieser Normalspannungsverteilungen sind für jeden Querschnitt durch eine gestrichelte Linie gekennzeichnet. Markieren Sie in den abgebildeten Querschnitten die Stellen, an denen die Normalspannung σ_x für den jeweiligen Querschnitt betragsmäßig maximal ist. Für jede Teilaufgabe wird genau dann ein Punkt vergeben, wenn alle gesuchten Stellen und keine weiteren markiert wurden.

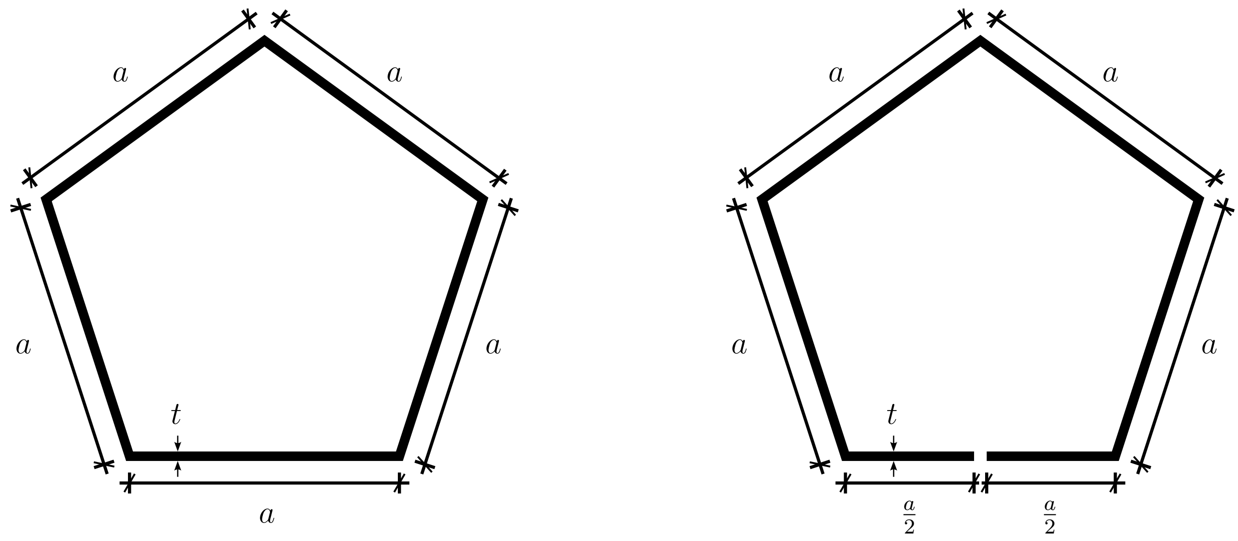
Gegeben: $a,\ t\ (t \ll a)$



Kurzfrage 5 [2 Punkte]

Gegeben sind die beiden skizzierten dünnwandigen Profile (Wanddicke $t \ll a$). Das Torsionsträgheitsmoment des linken, geschlossenen Profils ist $I_{T,g}$, das Torsionsträgheitsmoment des rechten, offenen Profils ist $I_{T,o}$. Geben Sie an, welches der beiden Profile das größere Torsionsträgheitsmoment hat, indem Sie in das unten stehende Kästchen ein $>$ eintragen, wenn das geschlossene Profil das größere Torsionsträgheitsmoment hat, ein $<$, wenn das offene Profil das größere Torsionsträgheitsmoment hat, oder ein $=$, wenn beide Torsionsträgheitsmomente gleich groß sind.

Gegeben: $a,\ t\ (t \ll a)$



$I_{T,g}$ $\boxed{}$ $I_{T,o}$

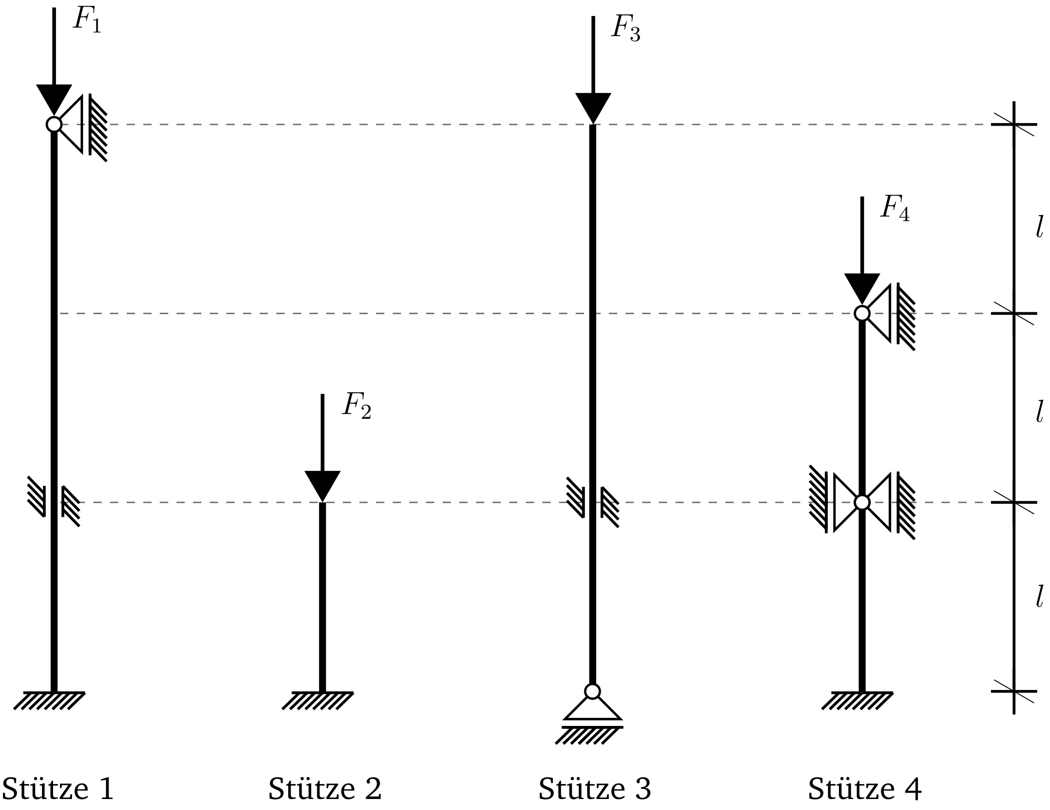
Kurzfrage 6 [5 Punkte]

Gegeben sind die vier skizzierten Stützen. Alle Stützen besitzen die gleiche Biegesteifigkeit EI. Die Stützen werden mit ihrer jeweiligen kritischen Knicklast $F_1 \ldots F_4$ belastet.

a) Zeichnen Sie in die Skizze für jede Stütze die zugehörige Knickfigur. Zeichnen Sie bei den Stützen mit mehreren Abschnitten für jeden Abschnitt die zugehörige Knickfigur.

b) Sortieren Sie die kritischen Knicklasten der Stützen nach der Größe, indem Sie jeweils den zugehörigen Index in die Ungleichung unten eintragen.

Gegeben: l, EI, $EA = \infty$



F $>$ F $>$ F $>$ F

Kurzfrage 7 [7 Punkte]

Ein zylindrischer Körper (Radius r, Länge l in die dritte Raumrichtung, Dichte ρ_K) schwimmt in einer Flüssigkeit (Dichte ρ) und ist genau zur Hälfte eingetaucht. Der Umgebungsdruck kann vernachlässigt werden ($p_0 = 0$). Berechnen Sie

a) die Gewichtskraft G des schwimmenden Körpers,

b) die von der Flüssigkeit auf den schwimmenden Körper wirkende Auftriebskraft F_A,

c) das Verhältnis der Dichte der Flüssigkeit ρ zur Dichte des schwimmenden Körpers ρ_K,

d) die z-Koordinaten der Schwerpunkte des schwimmenden Körpers S_K und der verdrängten Flüssigkeit S_F sowie deren Abstand e,

e) das auf die x-Achse bezogene Flächenträgheitsmoment I_x der Schwimmfläche,

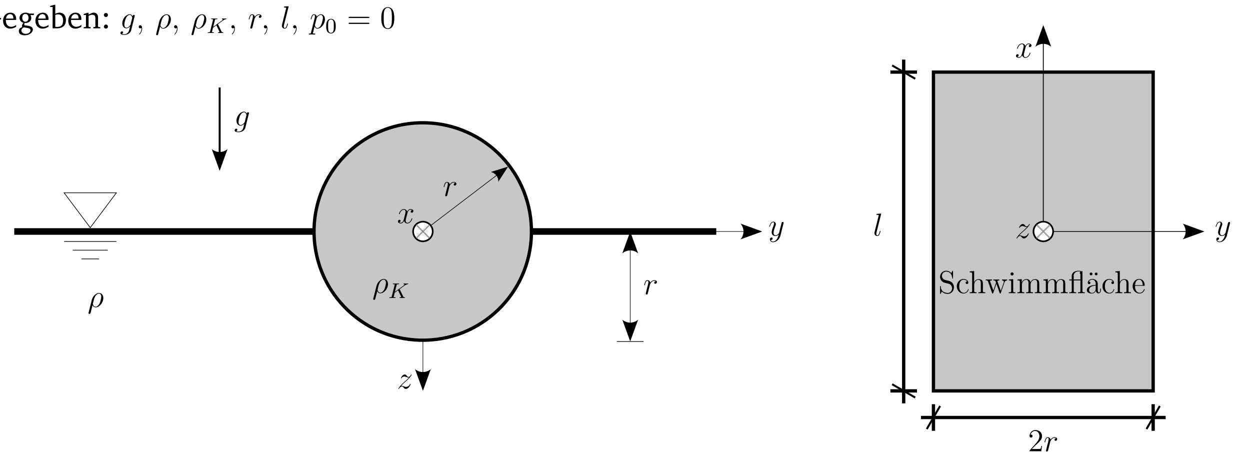
f) das Volumen V der verdrängten Flüssigkeit,

g) und den Abstand h_M von Schwerpunkt und Metazentrum des schwimmenden Körpers

und tragen Sie Ihre Ergebnisse in die dafür vorgesehenen Kästchen ein.

h) Geben Sie an, in welcher Art von Gleichgewichtszustand der schwimmende Körper sich befindet, indem Sie im unten stehenden Satz ausschließlich die korrekte Antwort ankreuzen.

Gegeben: g, ρ, ρ_K, r, l, $p_0 = 0$



$G =$ | $F_A =$ | $\frac{\rho}{\rho_K} =$

$z_{S_K} =$ | $z_{S_F} =$ | $e =$

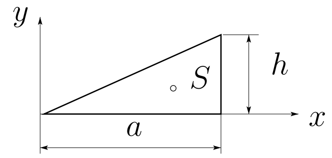
$I_x =$ | $V =$ | $h_M =$

Der schwimmende Körper befindet sich in einem ☐ stabilen ☐ instabilen ☐ indifferenten Gleichgewichtszustand.

Schwerpunktskoordinaten von Flächen

Rechtwinkliges Dreieck

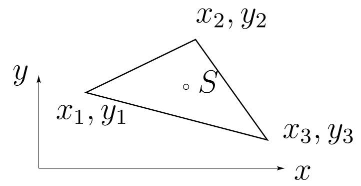
$$A = \frac{1}{2}\, a\, h$$



$$x_S = \frac{2}{3}\, a \qquad y_S = \frac{1}{3}\, h$$

Beliebiges Dreieck

$$A = \frac{1}{2}[(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1)]$$

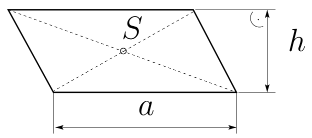


S liegt im Schnittpunkt der Seitenhalbierenden

$$x_S = \frac{1}{3}(x_1 + x_2 + x_3) \qquad y_S = \frac{1}{3}(y_1 + y_2 + y_3)$$

Parallelogramm

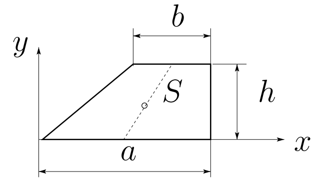
$$A = a\, h$$



S liegt im Schnittpunkt der Diagonalen

Trapez

$$A = \frac{1}{2} h\,(a + b)$$

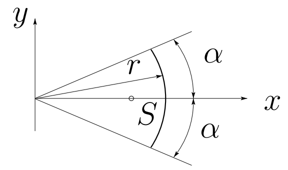


S liegt auf der Seitenhalbierenden

$$y_S = \frac{h}{3}\,\frac{a + 2b}{a + b}$$

Kreisausschnitt

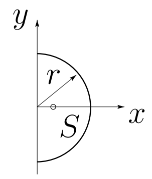
$$A = \alpha\, r^2$$



$$x_S = \frac{2}{3}\, r\, \frac{\sin\alpha}{\alpha}$$

Halbkreis

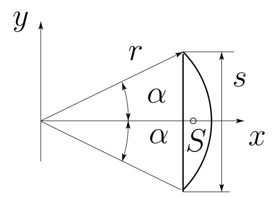
$$A = \frac{\pi}{2}\, r^2$$



$$x_S = \frac{4\, r}{3\, \pi}$$

Kreisabschnitt

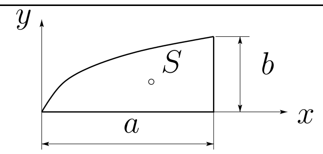
$$A = \frac{1}{2}\, r^2 (2\alpha - \sin 2\alpha)$$



$$x_S = \frac{s^3}{12A} = \frac{4}{3}\, r\, \frac{\sin^3\alpha}{2\alpha - \sin 2\alpha}$$

Quadratische Parabel

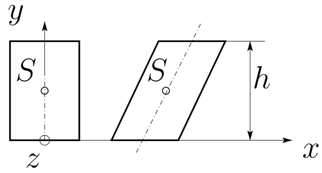
$$A = \frac{2}{3}\, a\, b$$



$$x_S = \frac{3}{5}\, a \qquad y_S = \frac{3}{8}\, b$$

Schwerpunktskoordinaten homogener Körper

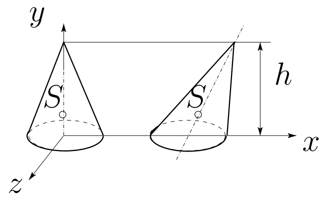
Gerades und schiefes Prisma mit parallelen Begrenzungsflächen



S liegt auf der Verbindungslinie der beiden Schwerpunkte der Begrenzungsflächen A

$y_S = \frac{1}{2}\,h \qquad V = A\cdot h$

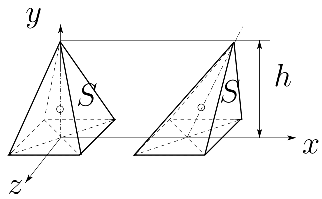
Gerader und schiefer Kegel



S liegt auf der Verbindungslinie zwischen der Spitze und dem Schwerpunkt der Grundfläche A

$y_S = \frac{1}{4}\,h \qquad V = \frac{1}{3}A\cdot h$

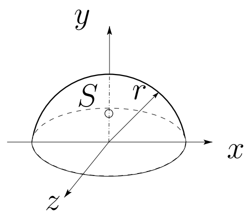
Gerade und schiefe Pyramide



S liegt auf der Verbindungslinie zwischen der Spitze und dem Schwerpunkt der Grundfläche A

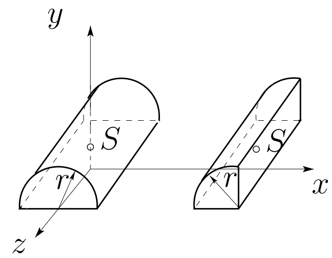
$y_S = \frac{1}{4}\,h \qquad V = \frac{1}{3}A\cdot h$

Halbkugel



$y_S = \frac{3}{8}\,r \qquad V = \frac{2}{3}\pi r^3$

Halb- und Viertelzylinder

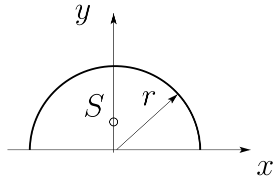


S liegt in der Schnittgeraden der beiden Symmetrieebenen im Abstand y_S von der Auflagefläche

$y_S = \frac{4}{3\pi}\,r$

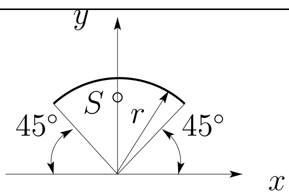
Schwerpunktskoordinaten von Linien

Halbkreisbogen



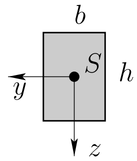
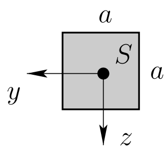
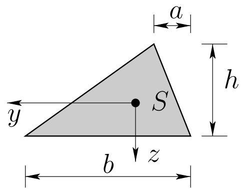
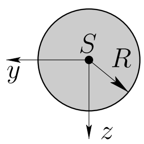
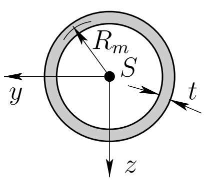
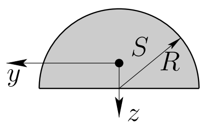
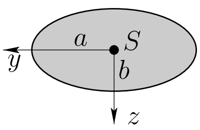
$y_S = \frac{2}{\pi}\,r$

Viertelkreisbogen



$y_S = \frac{2\sqrt{2}}{\pi}\,r$

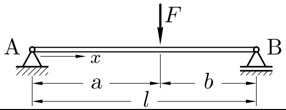
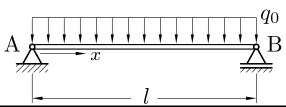
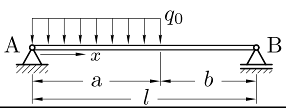
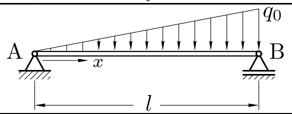
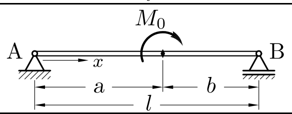
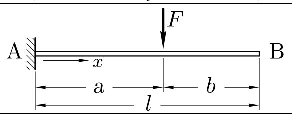
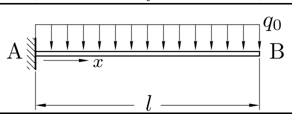
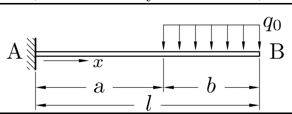
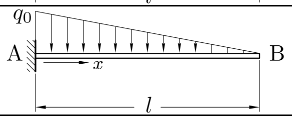
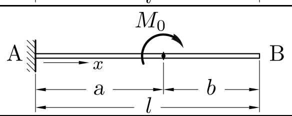
FLÄCHENTRÄGHEITSMOMENTE

Fläche	I_y	I_z	I_{yz}	I_p
Rechteck 	$\frac{b\,h^3}{12}$	$\frac{h\,b^3}{12}$	0	$\frac{b\,h}{12}(h^2+b^2)$
Quadrat 	$\frac{a^4}{12}$	$\frac{a^4}{12}$	0	$\frac{a^4}{6}$
Dreieck 	$\frac{b\,h^3}{36}$	$\frac{b\,h}{36}(b^2-ba+a^2)$	$\frac{b\,h^2}{72}(b-2a)$	$\frac{b\,h}{36}(h^2+b^2-ba+a^2)$
Kreis 	$\frac{\pi R^4}{4}$	$\frac{\pi R^4}{4}$	0	$\frac{\pi R^4}{2}$
dünner Kreisring $t \ll R_M$ 	$\pi R_m^3\,t$	$\pi R_m^3\,t$	0	$2\pi R_m^3\,t$
Halbkreis 	$\frac{R^4}{72\pi}(9\pi^2-64)$	$\frac{\pi R^4}{8}$	0	$\frac{R^4}{36\pi}(9\pi^2-32)$
Ellipse 	$\frac{\pi}{4}a\,b^3$	$\frac{\pi}{4}b\,a^3$	0	$\frac{\pi a\,b}{4}(a^2+b^2)$

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

TU Darmstadt
FG Kontinuumsmechanik
FB Bau- und Umweltingenieurwissenschaften

BIEGELINIENTAFEL

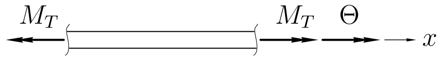
Nr.	Lastfall	EI w'_A	EI w'_B	EI $w(x)$	EI w_max
1		$\frac{Fl^2}{6}\,(\beta-\beta^3)$	$-\frac{Fl^2}{6}\,(\alpha-\alpha^3)$	$\frac{Fl^3}{6}\left[\beta\xi\,(1-\beta^2-\xi^2)+\langle\xi-\alpha\rangle^3\right]$	$\frac{Fl^3}{48}$ für $a=b=\frac{l}{2}$
2		$\frac{q_0\,l^3}{24}$	$-\frac{q_0\,l^3}{24}$	$\frac{q_0\,l^4}{24}\,(\xi-2\xi^3+\xi^4)$	$\frac{5q_0\,l^4}{384}$
3		$\frac{q_0\,l^3}{24}\,(1-\beta^2)^2$	$\frac{q_0\,l^3}{24}\left[4(1-\beta^3)-6(1-\beta^2)+(1-\beta^2)^2\right]$	$\frac{q_0\,l^4}{24}\left[\xi^4-\langle\xi-\alpha\rangle^4-2(1-\beta^2)\xi^3+(1-\beta^2)^2\xi\right]$	
4		$\frac{7q_0\,l^3}{360}$	$-\frac{q_0\,l^3}{45}$	$\frac{q_0\,l^4}{360}\,(7\xi-10\xi^3+3\xi^5)$	
5		$\frac{M_0\,l}{6}\,(3\beta^2-1)$ $\left[-\frac{M_0\,l}{6}\text{ für } b=0\right]$	$\frac{M_0\,l}{6}\,(3\alpha^2-1)$ $\left[\frac{M_0\,l}{3}\text{ für } b=0\right]$	$\frac{M_0\,l^2}{6}\left[\xi\,(3\beta^2-1)+\xi^3-3\,\langle\xi-\alpha\rangle^2\right]$	$\frac{\sqrt{3}M_0\,l^2}{27}$ für $a=0$
6		0	$\frac{F\,a^2}{2}$	$\frac{Fl^3}{6}\left[3\xi^2\alpha-\xi^3+\langle\xi-\alpha\rangle^3\right]$	$\frac{Fl^3}{3}$ für $a=l$
7		0	$\frac{q_0\,l^3}{6}$	$\frac{q_0\,l^4}{24}\,(6\xi^2-4\xi^3+\xi^4)$	$\frac{q_0\,l^4}{8}$
8		0	$\frac{q_0\,l^3}{6}\beta\,(\beta^2-3\beta+3)$	$\frac{q_0\,l^4}{24}\left[\langle\xi-\alpha\rangle^4-4\beta\xi^3+6\beta\,(2-\beta)\xi^2\right]$	
9		0	$\frac{q_0\,l^3}{24}$	$\frac{q_0\,l^4}{120}\,(10\xi^2-10\xi^3+5\xi^4-\xi^5)$	$\frac{q_0\,l^4}{30}$
10		0	$M_0\,a$	$\frac{M_0\,l^2}{2}\left[\xi^2-\langle\xi-\alpha\rangle^2\right]$	$\frac{M_0\,l^2}{2}$ für $a=l$

Erklärung: $\xi=\frac{x}{l}$, $\alpha=\frac{a}{l}$, $\beta=\frac{b}{l}$, $\mathrm{EI}=\text{const}$, $w'=\frac{dw}{dx}=\frac{1}{l}\,\frac{dw}{d\xi}$, $\langle\xi-\alpha\rangle^n=\begin{cases}(\xi-\alpha)^n & \text{für } \xi>\alpha\\ 0 & \text{für } \xi\le\alpha\end{cases}$

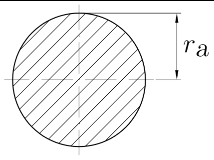
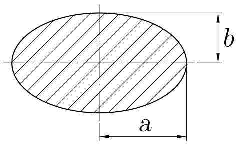
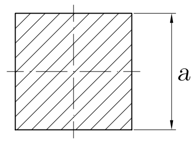
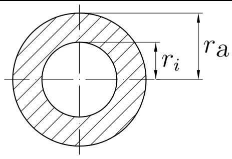
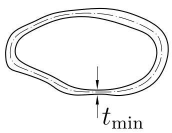
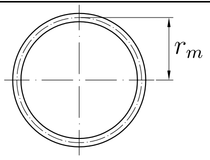
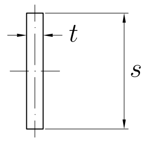
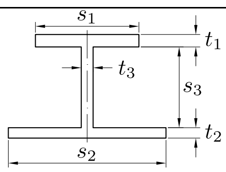
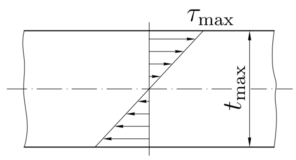
TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

TU Darmstadt
FG Kontinuumsmechanik
FB Bau- und Umweltingenieurwissenschaften

Hilfsblatt zur Torsion

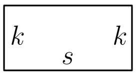
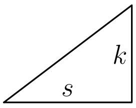
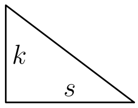
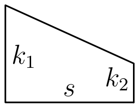
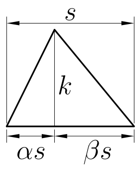
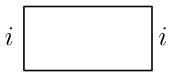
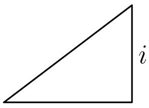
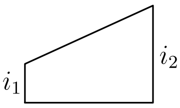
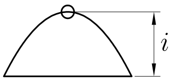
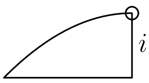
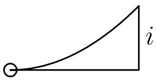
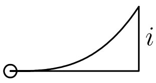
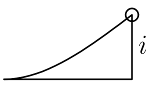
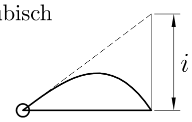


$$\frac{d\Theta}{dx} = \Theta' = \frac{M_T}{\mathrm{GI}_T}\,, \quad \tau_{\max} = \frac{M_T}{\mathrm{W}_T}$$

Querschnitt		W_T	I_T	Bemerkungen
1 	Vollkreisquerschnitt	$\dfrac{\pi r_a^3}{2}$	$\dfrac{\pi r_a^4}{2}$	größte Schubspannung am Rand $r = r_a$
2 	Ellipse $a \geq b$	$\dfrac{\pi a b^2}{2}$	$\dfrac{\pi a^3 b^3}{a^2+b^2}$	größte Schubspannung in den Endpunkten der kleinen Achse
3 	Quadrat	$0.208a^3$	$0.141a^4$	größte Schubspannung außen, in der Mitte der Seiten
4 	dickwandiges Kreisrohr $\alpha = r_i/r_a$	$\dfrac{\pi r_a^3}{2}(1-\alpha^4)$	$\dfrac{\pi r_a^4}{2}(1-\alpha^4)$	größte Schubspannung am äußeren Rand $r = r_a$
5 	dünnwandige geschlossene Hohlquerschnitte	$2\,A_m\,t_{\min}$	$\dfrac{(2A_m)^2}{\oint \frac{1}{t}\,\mathrm{d}s}$	$A_m =$ Von der Profilmitte eingeschlossene Fläche; $\oint \frac{1}{t}\,\mathrm{d}s =$ Linienintegral über die Profilmittellinie $\left(\text{für } t = \text{const.: } \frac{1}{t}\cdot \text{Umfang}\right)$; größte Schubspannung im dünnsten Querschnittsteil ($t_{\min}$)
6 	dünnwandiges Kreisrohr $t = \text{const.}$	$2\pi r_m^2 t$	$2\pi r_m^3 t$	
7 	schmales Rechteck $t \ll s$	$\dfrac{1}{3}\,s\,t^2$	$\dfrac{1}{3}\,s\,t^3$	größte Schubspannung in dem Querschnittsteil mit der größten Dicke ($t_{\max}$)
8 	dünnwandige offene Querschnitte	$\approx \dfrac{1}{3}\,\dfrac{\sum_i s_i t_i^3}{t_{\max}}$	$\approx \dfrac{1}{3}\sum_i s_i t_i^3$	

TAFEL der INTEGRALE

$$\int_0^s M_i M_k \, dx$$

M_k / M_i					
1 	sik	$\frac{1}{2}\,sik$	$\frac{1}{2}\,sik$	$\frac{1}{2}\,si\,(k_1+k_2)$	$\frac{1}{2}\,sik$
2 	$\frac{1}{2}\,sik$	$\frac{1}{3}\,sik$	$\frac{1}{6}\,sik$	$\frac{1}{6}\,si\,(k_1+2k_2)$	$\frac{1}{6}\,sik\,(1+\alpha)$
3 	$\frac{1}{2}\,s\,(i_1+i_2)\,k$	$\frac{1}{6}\,s\,(i_1+2i_2)\,k$	$\frac{1}{6}\,s\,(2i_1+i_2)\,k$	$\frac{1}{6}\,s\,(2i_1k_1 +2i_2k_2+i_1k_2 +i_2k_1)$	$\frac{1}{6}\,s\left\{(1+\beta)\,i_1 + (1+\alpha)\,i_2\right\}k$
quadratisch 4 	$\frac{2}{3}\,sik$	$\frac{1}{3}\,sik$	$\frac{1}{3}\,sik$	$\frac{1}{3}\,si\,(k_1+k_2)$	$\frac{1}{3}\,sik\,(1+\alpha\beta)$
quadratisch 5 	$\frac{2}{3}\,sik$	$\frac{5}{12}\,sik$	$\frac{1}{4}\,sik$	$\frac{1}{12}\,si \cdot (3k_1+5k_2)$	$\frac{1}{12}\,sik \cdot (5-\beta-\beta^2)$
quadratisch 6 	$\frac{1}{3}\,sik$	$\frac{1}{4}\,sik$	$\frac{1}{12}\,sik$	$\frac{1}{12}\,si \cdot (k_1+3k_2)$	$\frac{1}{12}\,sik \cdot (1+\alpha+\alpha^2)$
kubisch 7 	$\frac{1}{4}\,sik$	$\frac{1}{5}\,sik$	$\frac{1}{20}\,sik$	$\frac{1}{20}\,si \cdot (k_1+4k_2)$	$\frac{1}{20}\,sik \cdot (1+\alpha)(1+\alpha^2)$
kubisch 8 	$\frac{3}{8}\,sik$	$\frac{11}{40}\,sik$	$\frac{1}{10}\,sik$	$\frac{1}{40}\,si \cdot (4k_1+11k_2)$	$\frac{1}{10}\,sik \cdot (1+\alpha+\alpha^2-\frac{\alpha^3}{4})$
kubisch 9 	$\frac{1}{4}\,sik$	$\frac{2}{15}\,sik$	$\frac{7}{60}\,sik$	$\frac{1}{60}\,si \cdot (7k_1+8k_2)$	$\frac{1}{20}\,sik \cdot (1+\alpha)(\frac{7}{3}-\alpha^2)$

Quadratische Polynome: —o— kennzeichnen die Scheitelpunkte
Kubische Polynome: —o— kennzeichnen die Nullstelle der Dreiecksbelastung $q(x)$

Trapeze: $i-$ und $k-$ Koordinaten können auch negativ eingesetzt werden