Kurzlösung - Technische Mechanik II

SoSe 2023 (28. Juli 2023)

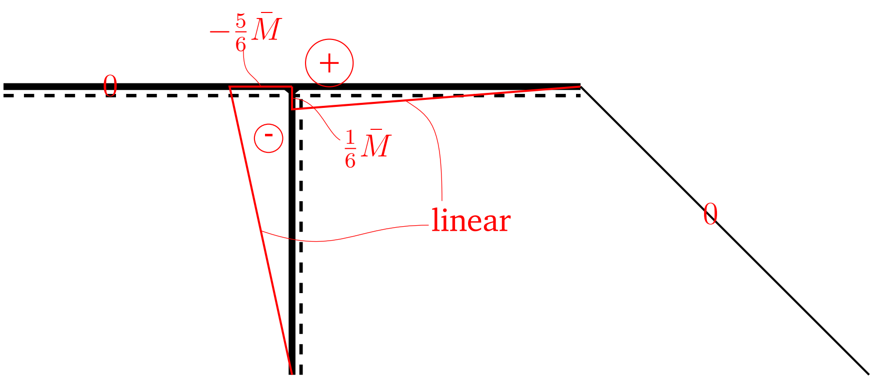
TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Aufgabe 1 (BI) [22 Punkte]

a)

$$S = -\frac{\sqrt{2}}{6}\frac{\bar{M}}{l}$$

b)



c)

$$\Delta l = -\frac{\sqrt{2}}{9}\frac{\bar{M}l^2}{EI}$$

Aufgabe 1 (G/UI) [22 Punkte]

a)

$$\begin{aligned} v_1 &= \sqrt{2gh} \\ v_2 &= \sqrt{g(2h-l)} \\ v_3 &= \sqrt{g(2h-3l)} \end{aligned}$$

b)

$$h_{\min} = \frac{3}{2} l$$

c)

$$y(x) = -\frac{2g}{3v_3^2} x^2 + \frac{\sqrt{3}}{3} x$$

d)

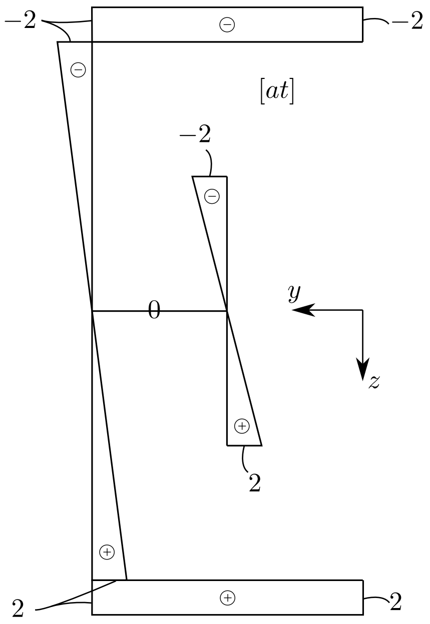
$$h_4 = \frac{-15 + 16\sqrt{3}}{6} l$$

e)

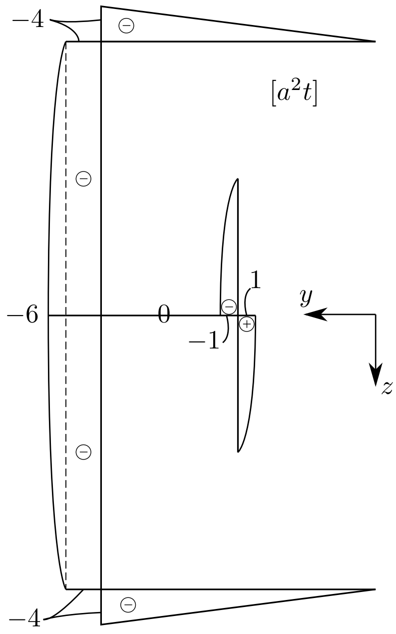
$$a = \sqrt{\frac{-18 + 16\sqrt{3}}{3} \frac{mgl}{c}}$$

Aufgabe 2 [20 Punkte]

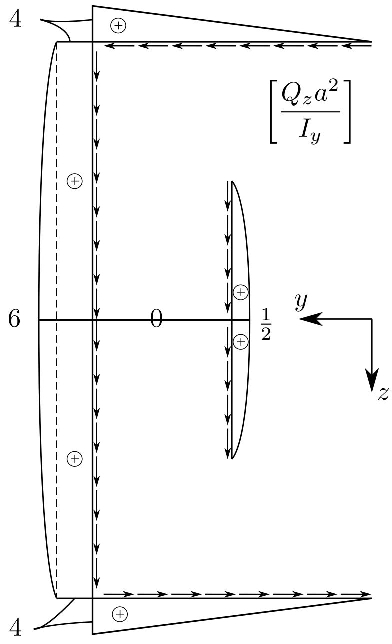
a) Verläufe:



(a) z-t-Verlauf



(b) S_y-Verlauf



(c) $\tau(s)$-Verlauf

b)

$$e_m = \frac{11}{17}a$$

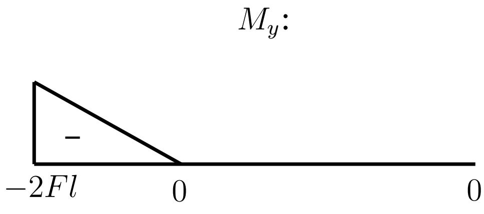
Aufgabe 3 [15 Punkte]

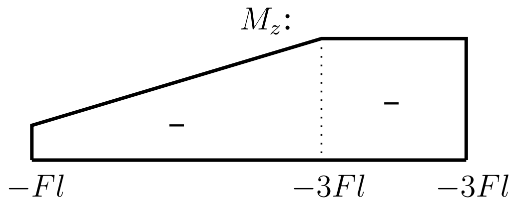
a)

$$I_y = \frac{37}{54}a^4$$
$$I_z = \frac{26}{27}a^4$$
$$I_{yz} = -\frac{13}{54}a^4$$

(aufgrund eines Fehlers im Hilfsblatt werden $-\frac{7}{54}a^4$ und $-\frac{19}{54}a^4$ auch als korrekt gewertet)

b)





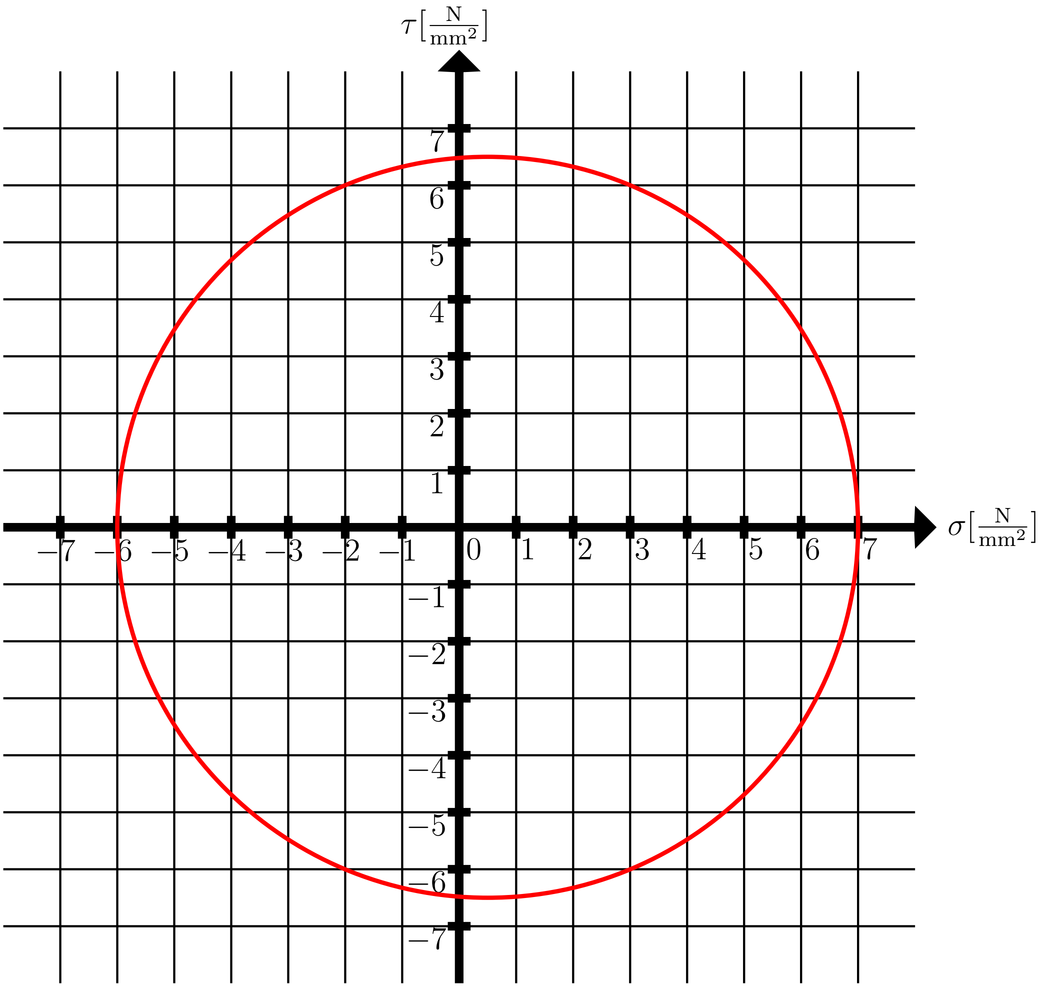
c)

$$\sigma_x(x=0,y,z) = \frac{1}{625}\frac{Fl}{a^4}\left[-1998z + 918y\right]$$

Kurzfrage 1 [5 Punkte]

Skizzieren Sie den Mohrschen Spannungskreis für den durch σ gegebenen Spannungszustand in das folgende σ, τ-Koordinatensystem und bestimmen Sie die mittlere Normalspannung σ_M, die Hauptnormalspannungen $\sigma_{1,2}$ sowie die maximale Schubspannung $\tau_{\max}$ und tragen Sie Ihre Ergebnisse mit Einheiten in die dafür vorgesehenen Kästchen ein.

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{pmatrix} \text{ mit } \sigma_x = 3\,\frac{\text{N}}{\text{mm}^2},\ \sigma_y = -2\,\frac{\text{N}}{\text{mm}^2},\ \tau_{xy} = 6\,\frac{\text{N}}{\text{mm}^2},$$



$\sigma_M =$ $0.5\,\frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$ $\tau_{\max} =$ $6.5\,\frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$

$\sigma_1 =$ $7\,\frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$ $\sigma_2 =$ $-6\,\frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$

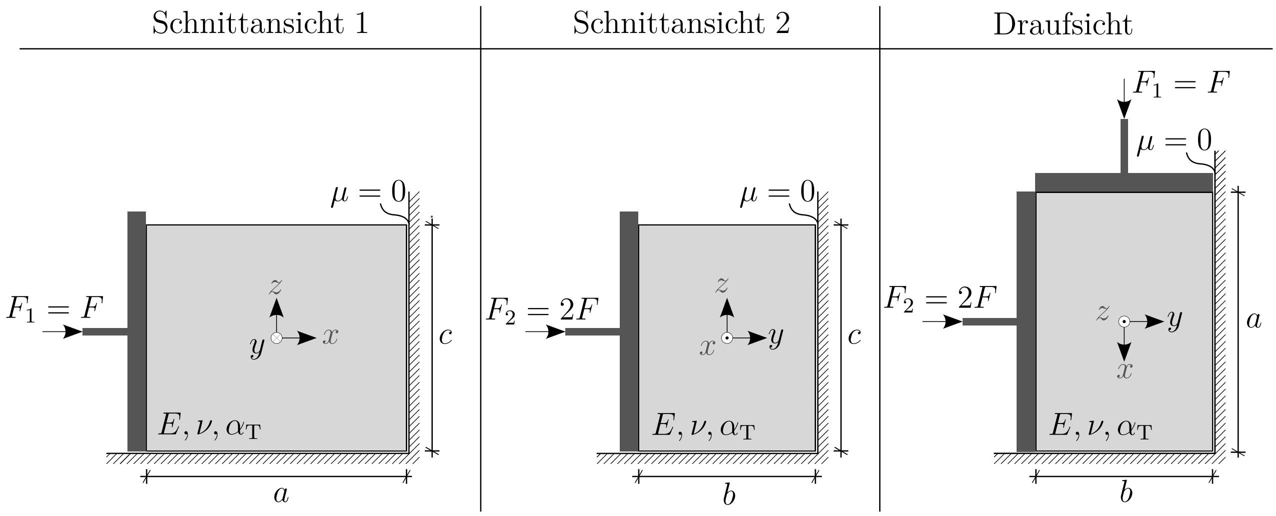
Kurzfrage 2 [7 Punkte]

Ein gewichtsloser Quader (Breite a, Tiefe b, Höhe c, Elastizitätsmodul E, Querkontraktionszahl ν, Wärmeausdehnungskoeffizient α_T) liegt in der Ecke eines Raumes, dessen Wände und Boden als starr und glatt (Reibkoeffizient $\mu = 0$) angenommen werden können. Im dargestellten Zustand ist der Quader spannungsfrei. Zunächst wird der Quader über zwei Stempel mit Hilfe der Kräfte $F_1 = F$ in x-Richtung und $F_2 = 2F$ in y-Richtung zusammengedrückt.

a) Geben Sie die Normalspannungen σ_x, σ_y, σ_z, die Dehnungen ε_x, ε_y und ε_z sowie die Breitenänderung Δa in x-Richtung, die Tiefenänderung Δb in y-Richtung und die Höhenänderung Δc in z-Richtung im verformten Zustand in den dafür vorgesehenen Kästchen an.

b) Zusätzlich zur Belastung durch die Kräfte F_1 und F_2 wird die Temperatur des Quaders jetzt noch um die Temperaturdifferenz ΔT verändert. Berechnen Sie, wie groß ΔT sein muss, sodass die Höhe des Quaders im Vergleich zum Ausgangszustand unverändert ist ($\Delta c = 0$). Tragen Sie Ihr Ergebnis in das dafür vorgesehene Kästchen ein.

Gegeben: a, b, c, E, ν, α_T, F, $F_1 = F$, $F_2 = 2F$, $\mu = 0$



$\sigma_x = \boxed{-\dfrac{F}{bc}}$

$\varepsilon_x = \boxed{\dfrac{F}{cE}\left(-\dfrac{1}{b} + \dfrac{2\nu}{a}\right)}$

$\Delta a = \boxed{\dfrac{F}{cE}\left(-\dfrac{a}{b} + 2\nu\right)}$

$\sigma_y = \boxed{-\dfrac{2F}{ac}}$

$\varepsilon_y = \boxed{\dfrac{F}{cE}\left(-\dfrac{2}{a} + \dfrac{\nu}{b}\right)}$

$\Delta b = \boxed{\dfrac{F}{cE}\left(-\dfrac{2b}{a} + \nu\right)}$

$\sigma_z = \boxed{0}$

$\varepsilon_z = \boxed{\dfrac{\nu F}{cE}\left(\dfrac{1}{b} + \dfrac{2}{a}\right)}$

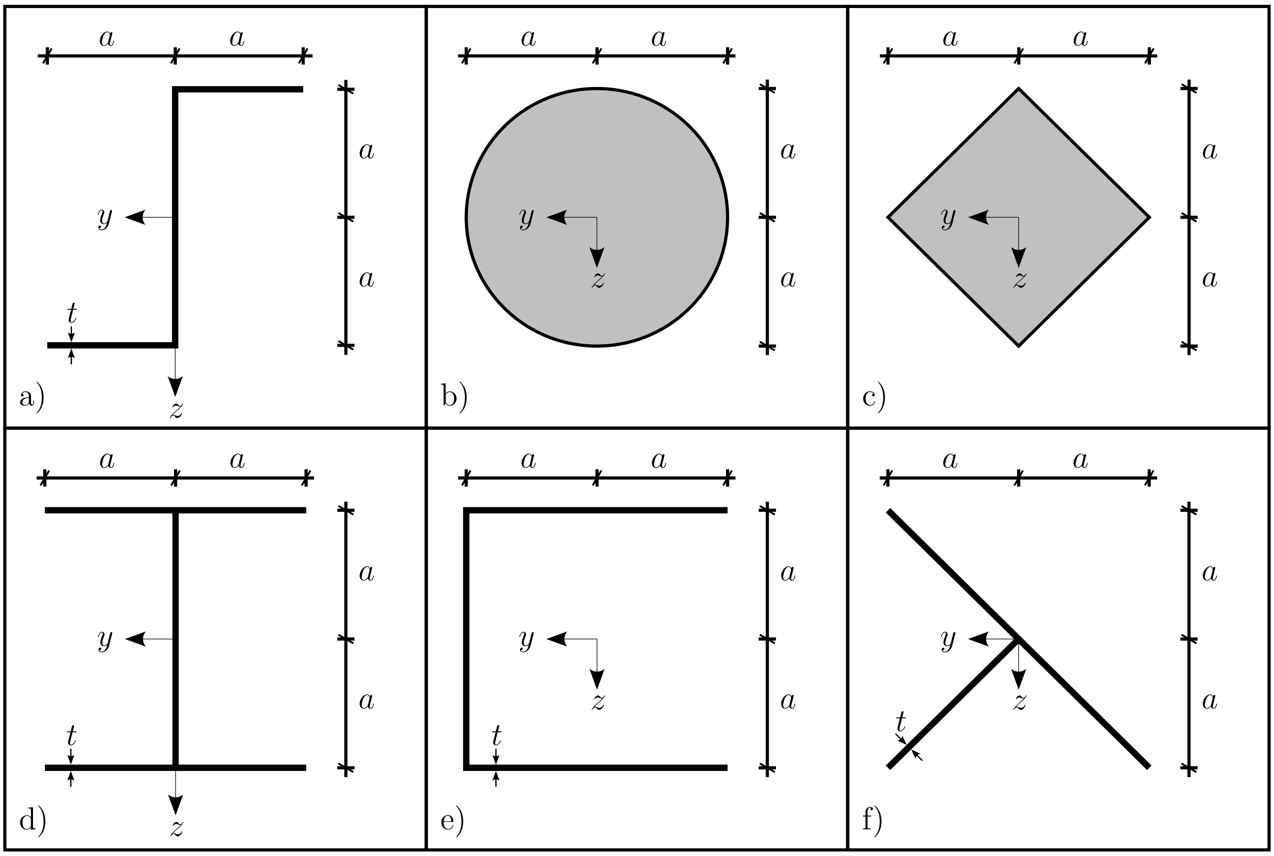
$\Delta c = \boxed{\dfrac{\nu F}{E}\left(\dfrac{1}{b} + \dfrac{2}{a}\right)}$

$\Delta T = \boxed{-\dfrac{\nu F}{\alpha_\mathrm{T} c E}\left(\dfrac{1}{b} + \dfrac{2}{a}\right)}$

Kurzfrage 3 [3 Punkte]

Gegeben sind die folgenden 6 Querschnitte. Ist eine Wanddicke t angegeben, so handelt es sich um einen dünnwandigen Querschnitt ($t \ll a$). Kreuzen Sie in der unten stehenden Tabelle für die Querschnitte a) bis f) an, ob das Flächendeviationsmoment I_{yz} bezüglich der gegebenen y, z-Koordinatensysteme 0 oder von 0 verschieden ist. Aufgabenteile, in denen nicht genau eine Option angekreuzt wird, werden mit 0 Punkten bewertet.

Gegeben: $a,\ t\ \ (t \ll a)$

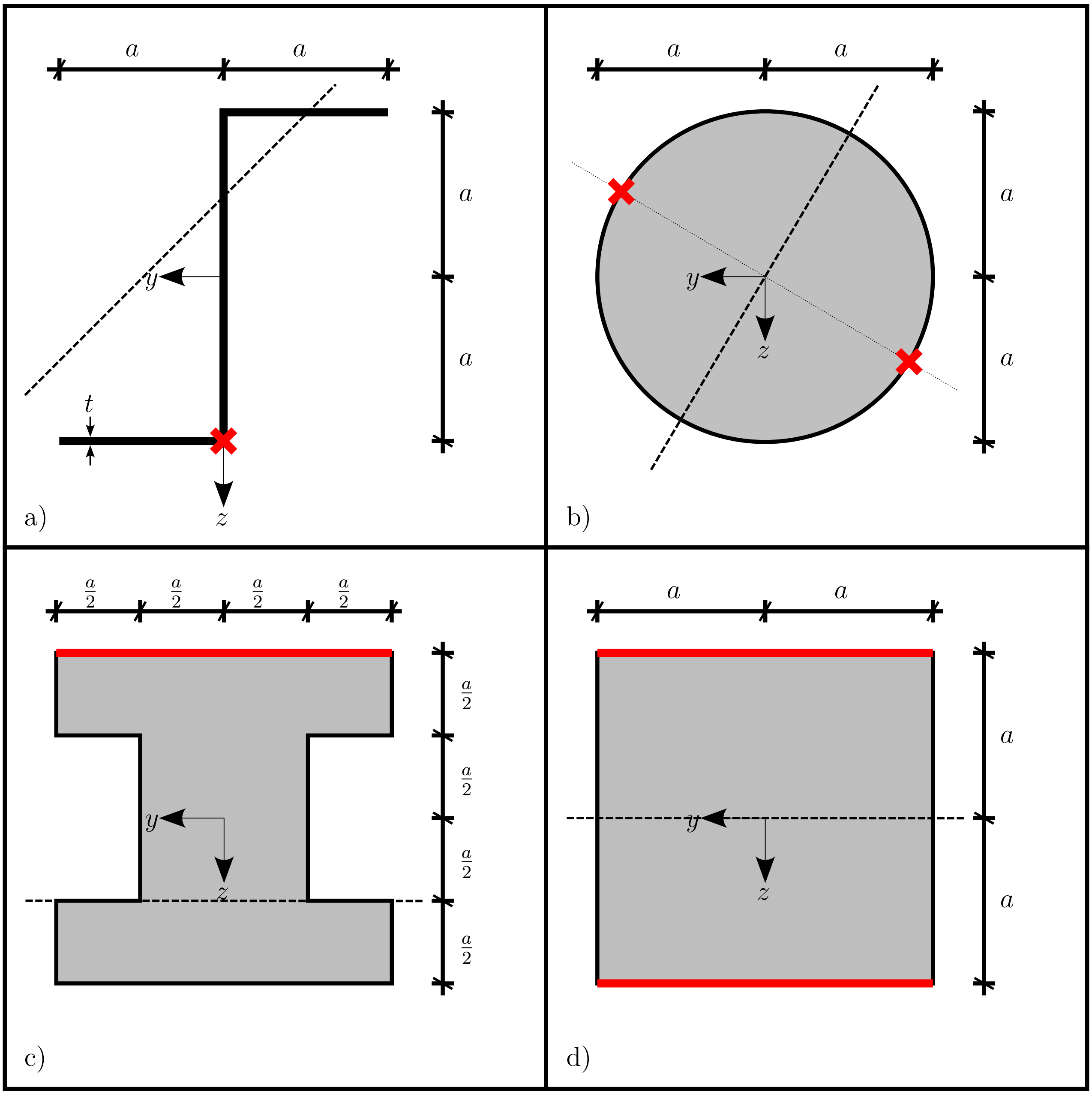


	$I_{yz} = 0$	$I_{yz} \neq 0$
a)		×
b)	×	
c)	×	
d)	×	
e)	×	
f)		×

Kurzfrage 4 [4 Punkte]

Gegeben sind die folgenden 4 Querschnitte. Ist eine Wanddicke t angegeben, so handelt es sich um einen dünnwandigen Querschnitt ($t \ll a$). In jedem der Querschnitte herrscht eine lineare Normalspannungsverteilung. Die Nulllinien dieser Normalspannungsverteilungen sind für jeden Querschnitt durch eine gestrichelte Linie gekennzeichnet. Markieren Sie in den abgebildeten Querschnitten die Stellen, an denen die Normalspannung σ_x für den jeweiligen Querschnitt betragsmäßig maximal ist. Für jede Teilaufgabe wird genau dann ein Punkt vergeben, wenn alle gesuchten Stellen und keine weiteren markiert wurden.

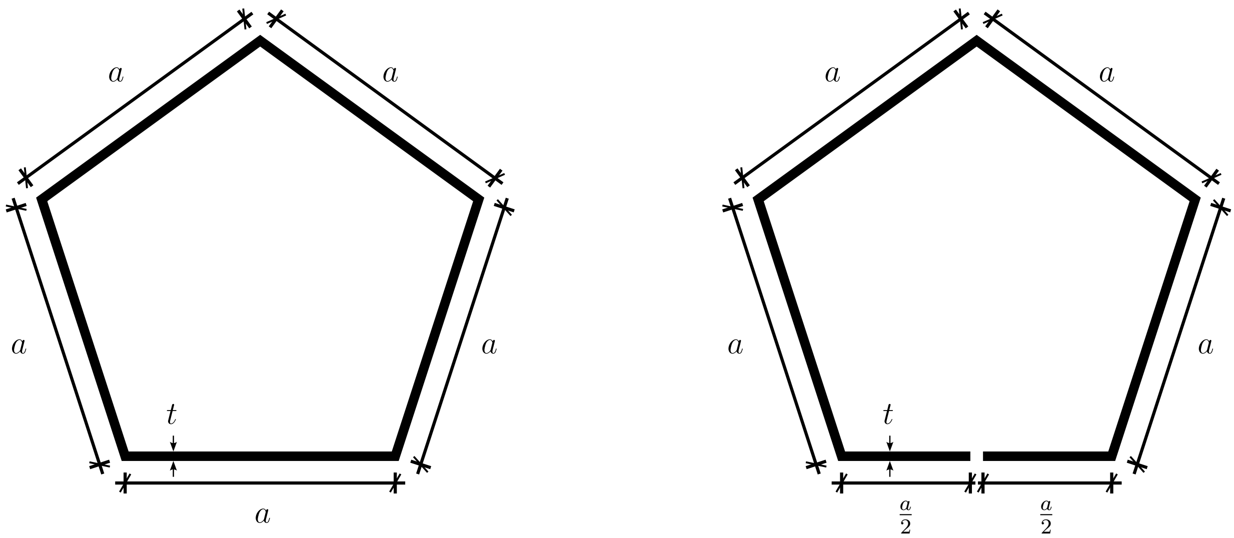
Gegeben: $a,\ t\ \ (t \ll a)$



Kurzfrage 5 (BI) [2 Punkte]

Gegeben sind die beiden skizzierten dünnwandigen Profile (Wanddicke $t \ll a$). Das Torsionsträgheitsmoment des linken, geschlossenen Profils ist $I_{T,g}$, das Torsionsträgheitsmoment des rechten, offenen Profils ist $I_{T,o}$. Geben Sie an, welches der beiden Profile das größere Torsionsträgheitsmoment hat, indem Sie in das unten stehende Kästchen ein $>$ eintragen, wenn das geschlossene Profil das größere Torsionsträgheitsmoment hat, ein $<$, wenn das offene Profil das größere Torsionsträgheitsmoment hat, oder ein $=$, wenn beide Torsionsträgheitsmomente gleich groß sind.

Gegeben: $a,\ t\ \ (t \ll a)$



$$I_{T,g} \quad \boxed{>} \quad I_{T,o}$$

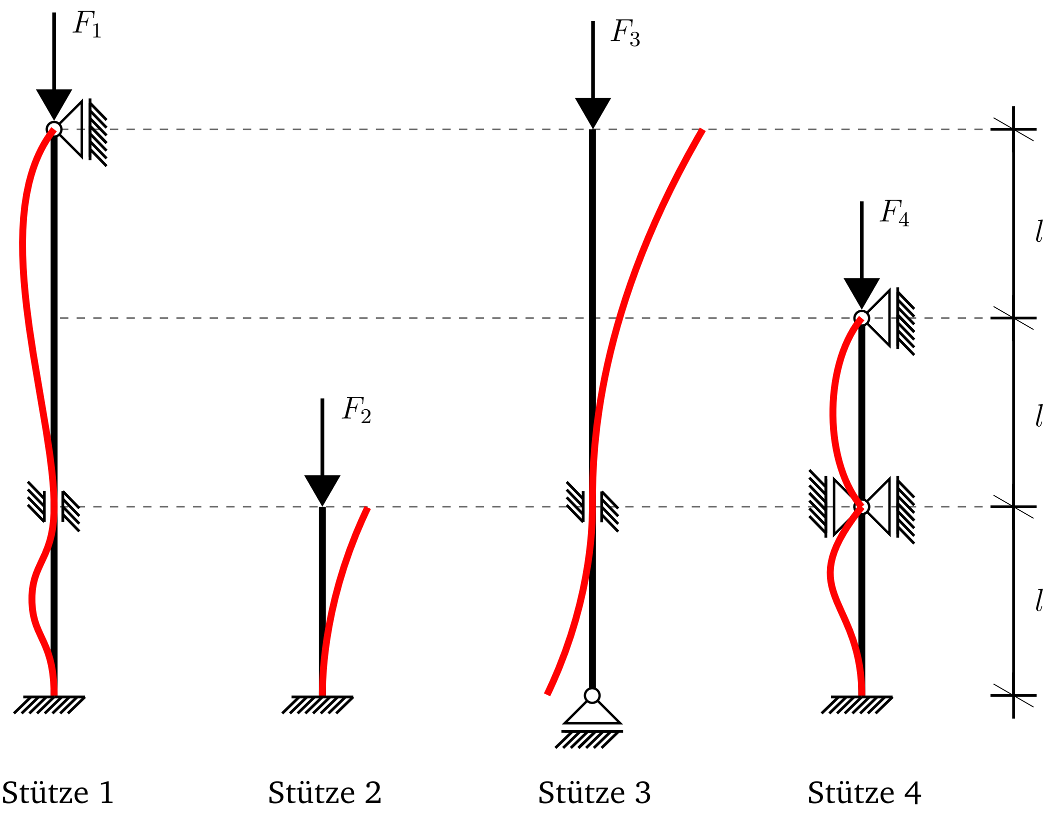
Kurzfrage 6 (BI) [5 Punkte]

Gegeben sind die vier skizzierten Stützen. Alle Stützen besitzen die gleiche Biegesteifigkeit EI. Die Stützen werden mit ihrer jeweiligen kritischen Knicklast $F_1 \dots F_4$ belastet.

a) Zeichnen Sie in die Skizze für jede Stütze die zugehörige Knickfigur. Zeichnen Sie bei den Stützen mit mehreren Abschnitten für jeden Abschnitt die zugehörige Knickfigur.

b) Sortieren Sie die kritischen Knicklasten der Stützen nach der Größe, indem Sie jeweils den zugehörigen Index in die Ungleichung unten eintragen.

Gegeben: l, EI, $EA = \infty$



$$\boxed{F_4} > \boxed{F_1} > \boxed{F_2} > \boxed{F_3}$$

Kurzfrage 7 (BI) [7 Punkte]

Ein zylindrischer Körper (Radius r, Länge l in die dritte Raumrichtung, Dichte ρ_K) schwimmt in einer Flüssigkeit (Dichte ρ) und ist genau zur Hälfte eingetaucht. Der Umgebungsdruck kann vernachlässigt werden ($p_0 = 0$). Berechnen Sie

a) die Gewichtskraft G des schwimmenden Körpers,

b) die von der Flüssigkeit auf den schwimmenden Körper wirkende Auftriebskraft F_A,

c) das Verhältnis der Dichte der Flüssigkeit ρ zur Dichte des schwimmenden Körpers ρ_K,

d) die z-Koordinaten der Schwerpunkte des schwimmenden Körpers S_K und der verdrängten Flüssigkeit S_F sowie deren Abstand e,

e) das auf die x-Achse bezogene Flächenträgheitsmoment I_x der Schwimmfläche,

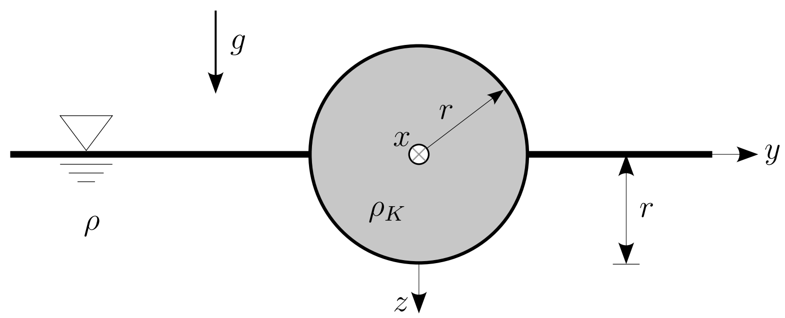
f) das Volumen V der verdrängten Flüssigkeit,

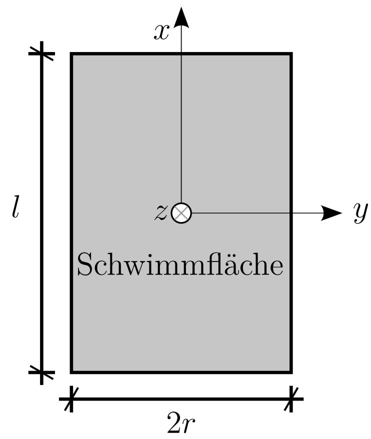
g) und den Abstand h_M von Schwerpunkt und Metazentrum des schwimmenden Körpers

und tragen Sie Ihre Ergebnisse in die dafür vorgesehenen Kästchen ein.

h) Geben Sie an, in welcher Art von Gleichgewichtszustand der schwimmende Körper sich befindet, indem Sie im unten stehenden Satz ausschließlich die korrekte Antwort ankreuzen.

Gegeben: g, ρ, ρ_K, r, l, $p_0 = 0$





$G =$	$\rho_K g \pi r^2 l$	$F_A =$	$\frac{1}{2}\rho g \pi r^2 l$	$\frac{\rho}{\rho_K} =$	2
$z_{S_K} =$	0	$z_{S_F} =$	$\frac{4r}{3\pi}$	$e =$	$\frac{4r}{3\pi}$
$I_x =$	$\frac{2}{3} l r^3$	$V =$	$\frac{1}{2}\pi r^2 l$	$h_M =$	0

Der schwimmende Körper befindet sich in einem ☐ stabilen ☐ instabilen × indifferenten Gleichgewichtszustand.

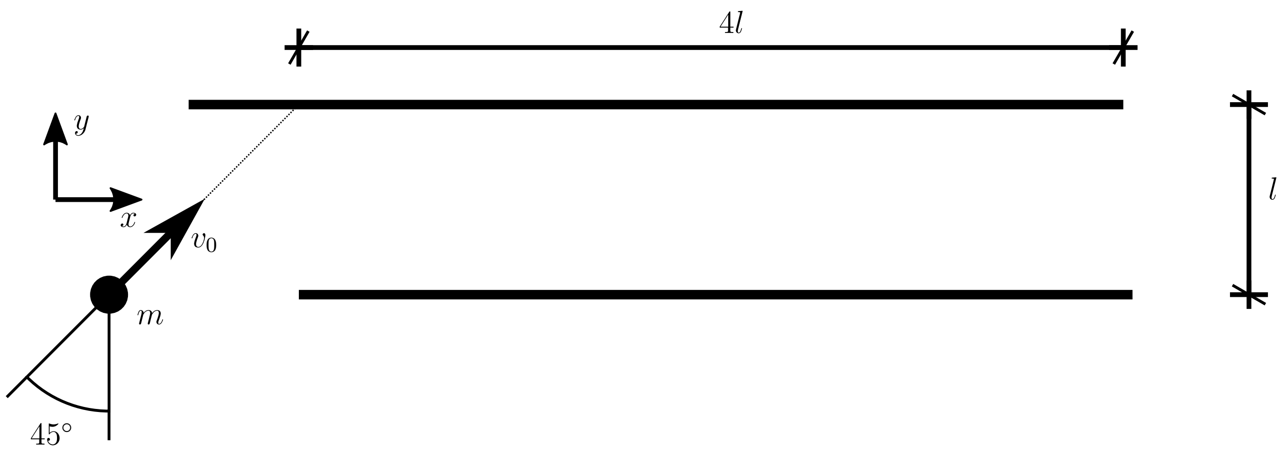
Kurzfrage 5 (G/UI) [2 Punkte]

Zwei Massenpunkte (Masse m) fliegen mit einem Zeitabstand, der groß genug ist, damit sie sich nicht gegenseitig beeinflussen, unter einem Winkel von $45°$ zur Vertikalen mit der Geschwindigkeit v_0 in ein horizontal liegendes, glattes Rohr mit Länge $4l$ und Durchmesser l und stoßen abwechselnd gegen die Seiten. Die Stöße des ersten Massenpunkts haben dabei die Stoßzahl $e_1 = 1$, die des zweiten die Stoßzahl $e_2 = \frac{1}{2}$.

Eine Gewichtskraft ist <u>nicht</u> zu beachten.

Die Anzahl der Stöße des ersten Massenpunkts gegen die Seiten des Rohrs ist n_1, die Anzahl der Stöße des zweiten ist n_2. Geben Sie an, welcher der beiden Massenpunkte öfter gegen die Seiten des Rohrs stößt, indem Sie in das unten stehende Kästchen ein $>$ eintragen, wenn der erste Massenpunkt öfter gegen die Seiten des Rohrs stößt, ein $<$, wenn der zweite Massenpunkt öfter gegen die Seiten des Rohrs stößt, oder ein $=$, wenn beide Massenpunkte gleich oft gegen die Seiten des Rohrs stoßen.

Gegeben: $m,\ v_0,\ l,\ e_1 = 1,\ e_2 = \frac{1}{2}$

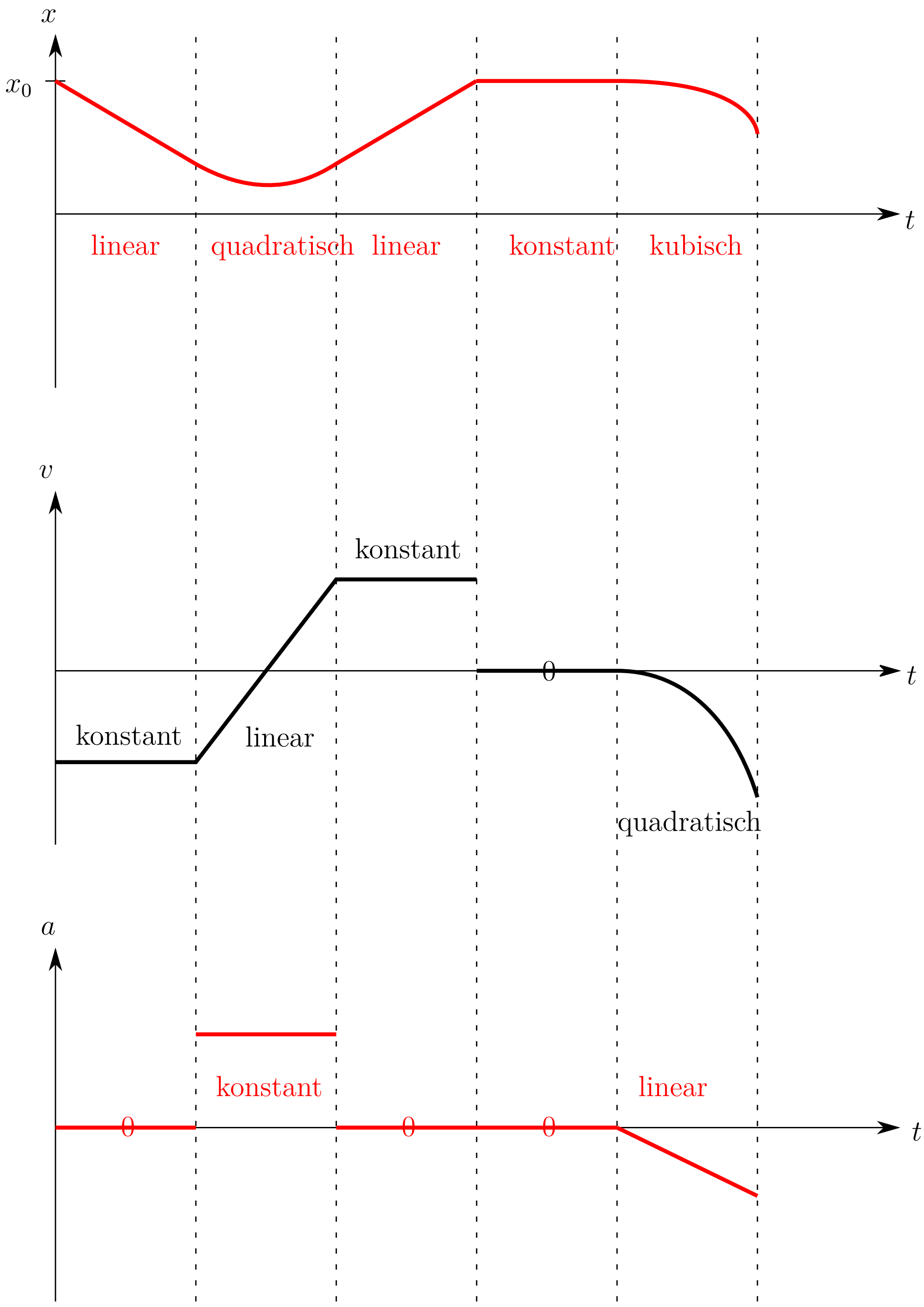


$n_1 \ \boxed{>}\ n_2$

Kurzfrage 6 (G/UI) [5 Punkte]

Gegeben ist das skizzierte Geschwindigkeits-Zeit-Diagramm $v(t)$. Skizzieren Sie qualitativ das zugehörige Weg-Zeit-Diagramm $x(t)$ und das Beschleunigungs-Zeit-Diagramm $a(t)$ in die folgende Abbildung. Beschriften Sie zudem die Art der Verläufe (Null, konstant, linear, quadratisch, ...).

Gegeben: $x(t = 0) = x_0$



Kurzfrage 7 (G/UI) [7 Punkte]

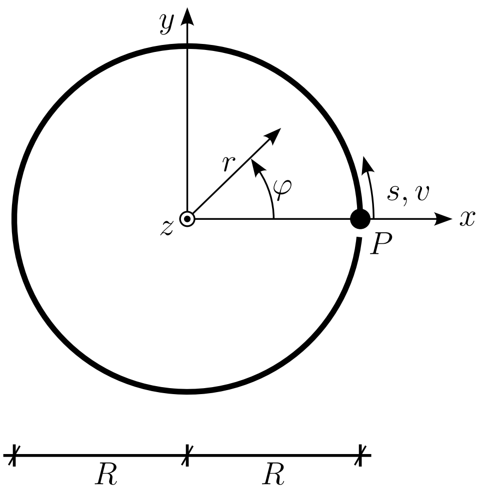
Ein Punkt P bewegt sich mit konstanter Bahngeschwindigkeit v auf einer rechtsgängig-helixförmigen Bahn $\vec{r}(s)$ mit genau einer Windung, Radius R und Ganghöhe $h = \frac{11}{30}\pi R$. Die Position des Punktes P zum Zeitpunkt $t = 0$ ist in Zylinderkoordinaten durch $r(t=0) = R$, $\varphi(t=0) = 0$ und $z(t=0) = 0$ gegeben. Berechnen Sie

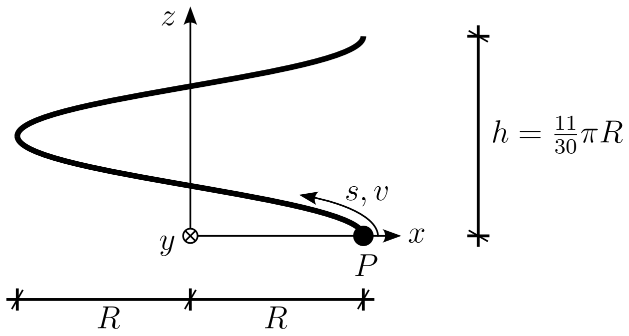
a) die Position des Punktes P in Abhängigkeit von der Zeit sowohl in kartesischen Koordinaten als auch Zylinderkoordinaten, das heißt $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$, $r(t)$ und $\varphi(t)$,

b) die Geschwindigkeiten $\dot{x}(t)$, $\dot{y}(t)$, $\dot{z}(t)$ und $\dot{r}(t)$ und die Winkelgeschwindigkeit $\omega(t) = \dot{\varphi}(t)$

c) und die Beschleunigungen $\ddot{x}(t)$, $\ddot{y}(t)$, $\ddot{z}(t)$ und $\ddot{r}(t)$ und die Winkelbeschleunigung $\alpha(t) = \ddot{\varphi}(t)$

und tragen Sie Ihre Ergebnisse in die dafür vorgesehenen Kästchen ein.
Gegeben: $v,\ R,\ h = \frac{11}{30}\pi R,\ r(t=0) = R,\ \varphi(t=0) = 0,\ z(t=0) = 0$





$x(t) = \boxed{R\cos\left(\frac{60}{61}\frac{v}{R}t\right)}$	$\dot{x}(t) = \boxed{-\frac{60}{61}v\sin\left(\frac{60}{61}\frac{v}{R}t\right)}$	$\ddot{x}(t) = \boxed{-\frac{3600}{3721}\frac{v^2}{R}\cos\left(\frac{60}{61}\frac{v}{R}t\right)}$
$y(t) = \boxed{R\sin\left(\frac{60}{61}\frac{v}{R}t\right)}$	$\dot{y}(t) = \boxed{\frac{60}{61}v\cos\left(\frac{60}{61}\frac{v}{R}t\right)}$	$\ddot{y}(t) = \boxed{-\frac{3600}{3721}\frac{v^2}{R}\sin\left(\frac{60}{61}\frac{v}{R}t\right)}$
$z(t) = \boxed{\frac{11}{61}vt}$	$\dot{z}(t) = \boxed{\frac{11}{61}v}$	$\ddot{z}(t) = \boxed{0}$
$r(t) = \boxed{R}$	$\dot{r}(t) = \boxed{0}$	$\ddot{r}(t) = \boxed{0}$
$\varphi(t) = \boxed{\frac{60}{61}\frac{v}{R}t}$	$\omega(t) = \boxed{\frac{60}{61}\frac{v}{R}}$	$\alpha(t) = \boxed{0}$